IFP
TU Wien

Dr. A. Toschi, C. Taranto, G. Rohringer

1. Übung QFT für Vielteilchen-Systeme

15.03.2012, 14:00-16:00, Seminarraum 138C

1. Identische Teilchen in 1. Quantisierung

1+2+2=5 Punkte

Sei $\psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n)$ eine Wellenfunktion eines Systems von n identischen Teilchen.

a) $\hat{\mathcal{P}}_{ij}$ ist der Permutationsoperator der die Teilchen i und j vertauscht, d.h.,

$$\hat{\mathcal{P}}_{ij}\psi(\vec{r}_1, ...\vec{r}_i, ...\vec{r}_j, ..., \vec{r}_n) = \psi(\vec{r}_1, ...\vec{r}_j, ...\vec{r}_i, ..., \vec{r}_n). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte dieses Operator immer $+1$ oder -1 sind.

b) Der Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}}$ eines System von n identischen nicht-wechselwirkenden Teilchen ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathcal{H}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right). \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass sich die n-Teilchen Eigenfunktion als Produkt von 1-Teilchen-Eigenfunktionen schreiben lässt.
Für identische Fermionen muss die Wellenfunktion vollständig antisymmetrisch bezüglich des Austauschs zweier Teilchen sein. Zeigen Sie, dass dies für die Slater-Determinante

$$\psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_1) & \cdots & \phi_n(\vec{r}_1) \\ \phi_1(\vec{r}_2) & \phi_2(\vec{r}_2) & \cdots & \phi_n(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(\vec{r}_n) & \phi_2(\vec{r}_n) & \cdots & \phi_n(\vec{r}_n) \end{vmatrix} \tag{3}$$

der Fall ist, und dass diese eine Eigenfunktion des Hamilton-Operators (2) ist, wenn die $\phi_i(\vec{r}_j)$ Eigenfunktionen von $\hat{\mathcal{H}}^{(j)}$ sind.

c) Berechnen Sie für diese Slater-Determinante den Erwartungswert der Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}} &= \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathcal{T}}_1(\vec{r}_i) \quad \text{(1-Teilchenoperator)} \\ \hat{\mathcal{V}} &= \sum_{i<j} \hat{\mathcal{V}}_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad \text{(2-Teilchenoperator)} \end{aligned} \tag{4}$$

2. Kanonisches Ensemble

2 Punkte

In einem System, das sich im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur $T = \frac{1}{\beta}$ befindet, ist die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Energiezustandes $|n\rangle$ durch den Boltzmannfaktor $\frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$ gegeben, wobei $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$ die Normierung ist. Zeigen Sie, dass der sich der Erwartungswert eines Operators $\hat{\mathcal{O}}$ als

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}\hat{\mathcal{O}}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}\right)} \tag{5}$$

schreiben lässt.