$$\varepsilon(\vec{k}) = 2A \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i) \quad , \quad \vec{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{R}^d, \; k_i \in [-\pi, \pi)$$
$$A \in \mathbb{R} \quad , A \in \mathbb{R}$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} dk_d}_{\int d^d k} \; \delta(\varepsilon - \varepsilon(\vec{k}))$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \; \rho(\varepsilon) = 1$ (Normierung, ρ ist Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \; \varepsilon \cdot \rho(\varepsilon) = 0 = \mu$ (Erwartungswert)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \; \varepsilon^2 \rho(\varepsilon) = 4A^2 \, d \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dk \cos^2 k = 2dA^2 = \sigma^2$

((Standardabweichung)^2 = Varianz)

$$\boxed{\sigma = \sqrt{2d} \cdot A \qquad A = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{d}}} \boxed{2A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \cdot \sigma}$$

$\Rightarrow$ fixiert man die Standardabweichung so hängt A von der Dimension d ab.

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(\vec{k}) = 2A \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i) = \sqrt{2} \cdot \sigma \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i)$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} dk_d \; \delta\left(\varepsilon - \sqrt{2}\,\sigma \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i)\right)$$

[$\Rightarrow$ $\cos(k_i) = \cos(-k_i) \Rightarrow \varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(-\vec{k}) \Rightarrow$ Jedes Integral geht nur von 0 bis π und liefert Faktor 2

$$= \frac{1}{\pi^d} \int_{0}^{\pi} dk_1 \; \int_{0}^{\pi} dk_d \; \delta\left(\varepsilon - \sqrt{2}\,\sigma \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i)\right)$$

$\Rightarrow$ Durchführung der k_d-Integration: $\delta(\tilde{f}(k_d)) = \sum_j \delta(k_d - k_d^j) \frac{1}{|f'(k_d^j)|}$ wobei $f(k_d^j) = 0$ ist, d.h. die Summe über j ist eine Summe über alle Nullstellen der Fkt. $\tilde{f}$.

•) $\varepsilon - \sqrt{2}\,\sigma\,\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}\cos(k_i) = 0 \Rightarrow \cos(k_d) = \sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}\cos(k_i)$

Ist nun $-1 \leqslant \sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} \leqslant +1$ so $\exists!\ k_d^0 \in [0,\pi)$, s.d. obige Glg. erfüllt ist.

•) $|f'(k_d)| = \left|-\sqrt{2}\,\sigma\,\frac{1}{\sqrt{d}}\sin(k_d)\right| = \sqrt{2}\sigma\,\frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{1-\cos^2(k_d)}$

$$\Rightarrow \quad = \sqrt{2}\,\sigma\,\frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{1-\left(\sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}\cos(k_i)\right)^2}$$

$$(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^d}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2}\sigma}\int_0^\pi dk_1 \dots \int_0^\pi dk_{d-1}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} + \sum_{i=1}^{d-1}\cos(k_i)\right)^2}}\,\Theta\left(1-\left|\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}\cos(k_i)\right|\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(k_i) &= v_i\\ -\sin(k_i)\,dk_i &= dv_i\end{aligned}\right\} \Rightarrow dk_i = -\frac{dv_i}{\sqrt{1-v_i^2}},\ \text{Grenzen } 1 \text{ bis } -1$$

⇒ Umdrehen der Grenzen auf -1 bis 1 hebt das Minus in dk_i weg.

$$(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\int_{-1}^{1} dv_1 \dots \int_{-1}^{1} dv_{d-1}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)\cdot\ \cdot\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-v_{d-1}^2}}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}\cos(k_i)\right)^2}}\right)\Theta\left(1-\left|\sqrt{d}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}\sum_{i=1}^{d-1}v_i\right|\right)$$

$v_i = \sqrt{d}\,x_i$ und Grenzen auf $-\infty$ bis $+\infty$ erweitern durch Einführung von Θ-Funktionen

$$(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{d-1}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-dx_1^2}}\,\Theta(1-|\sqrt{d}\,x_1|)\right)\cdot \dots \cdot\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-dx_{d-1}^2}}\,\Theta(1-|\sqrt{d}\,x_{d-1}|)\right)$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-d\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}x_i\right)^2}}\right)\Theta\left(1-\left|\sqrt{d}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}x_i\right)\right|\right)$$

$$\left[g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-dx^2}}\,\Theta(1-\sqrt{d}\,|x|)\right]$$

$$) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{d-1}\ g(x_1)\dots g(x_{d-1})\ g\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - \sum_{i=1}^{d-1}x_i\right)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ g(x) = 1$ u. $g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

g ist Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.

$\Rightarrow$ f ist Faltung von d Wahrscheinlichkeitsdichte-Fkt. g

(und damit wieder eine Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.)

Fourierdarstellungen

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Theta(1-|x|)$$

$$\left[\begin{aligned} \tilde{h}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, h(x)\, e^{iAx} \\ h(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dA\, \tilde{h}(A)\, e^{-iAx} \end{aligned}\right]$$

$\tilde{h}(A)$ ist analytisch auf $\mathbb{C}$, da $h(x)$ für $|x| \to \infty$ schneller als jede Potenz von x abfällt. ($h(x)$ ist nämlich 0 außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$)

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1-d\cdot x^2}} \Theta(1-\sqrt{d}|x|)$$

$$\left[\begin{aligned} \tilde{g}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\, e^{iAx} \underset{\sqrt{d}x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, h(x)\, e^{i\frac{A}{\sqrt{d}}x} = \tilde{h}\left(\frac{A}{\sqrt{d}}\right) \\ g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dA\, \tilde{g}(A)\, e^{-iAx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dA\, h\left(\frac{A}{\sqrt{d}}\right) e^{-iAx} \end{aligned}\right]$$

Nun setzt man in $f(\varepsilon)$ die Fourier-Darstellung von $g(x)$ ein:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{d-1}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dA_1 \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dA_d\, h\left(\frac{A_1}{\sqrt{d}}\right) \ldots h\left(\frac{A_d}{\sqrt{d}}\right)$$
$$\cdot e^{-iA_1x_1} \ldots e^{-iA_{d-1}x_{d-1}} \cdot e^{-iA_d\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} - x_1 - \ldots - x_{d-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dA_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dA_d\, h\left(\frac{A_1}{\sqrt{d}}\right) \ldots h\left(\frac{A_d}{\sqrt{d}}\right) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\, e^{-ix_1(A_1-A_d)}}_{\delta(A_1-A_d)}$$
$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_{d-1}\, e^{-ix_{d-1}(A_{d-1}-A_d)}}_{\delta(A_{d-1}-A_d)} \; e^{-iA_d\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}}$$

Durchführung der $A_1 - A_{d-1}$ - Integration nun möglich ($\Rightarrow$ alle A_i's werden zu $A_d = A$)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \left[h\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{d}}\right)\right]^d e^{-i\Lambda \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \left[J_0\left(\Lambda/\sqrt{d}\right)\right]^d \cdot \cos\left(\Lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Berechnung von $h(\Lambda)$

$$h(\Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Theta(1-|x|) \underbrace{e^{i\Lambda x}}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\Lambda x)^n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\Lambda)^n x^n = \left| \; x = \cos\varphi \; \right|$$

$$= J_0(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} (-1)^n \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{\Lambda^2}{4} + O(\Lambda^4)$$

$$h\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{d}}\right) = 1 - \frac{\Lambda^2}{4d} + O\left(\frac{\Lambda^4}{d^2}\right)$$

$$\left[h\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{d}}\right)\right]^d = \left[1 - \frac{\Lambda^2}{4d} + O\left(\frac{\Lambda^4}{d^2}\right)\right]^d \underset{\lim d\to\infty}{=} e^{-\frac{\Lambda^2}{4}}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \; \underbrace{e^{-\frac{\Lambda^2}{4}} e^{-i\Lambda \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \; e^{-\frac{\Lambda^2}{4} - i\Lambda \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}}$$

Der gesamte Integrand hat keine Pole in der gesamten komplexen Λ-Ebene $\Rightarrow$ Integrationsweg kann beliebig verformt werden.

$$\left[\begin{aligned} \Lambda &= 2x - i \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma} \\ d\Lambda &= 2\, dx \end{aligned} \right]$$

$$-\frac{\Lambda^2}{4} - i\Lambda \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma} = -\frac{1}{4}\left(2x - i\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma}\right)^2 - i\left(2x - i\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma}\right)\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$= -x^2 + i\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma}x + \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} - i\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sigma}x - \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$$

$$= -x^2 - \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{\cancel{2}\pi} \cdot \cancel{2}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-x^2}}_{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}}$$

allg.: $$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \left[J_0\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{d}}\right)\right]^d \cos\left(\Lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

J_0 ... Besselfunktion