Aufgabe 12: Zustandsdichte für hohe Dimensionen

Die tight-binding-Dispersion von Elektronen auf einem d-dimensionalen hyperkubischen Gitter, bei der nur das Überlapp-Integral t zwischen nächsten Nachbarn berücksichtigt wird, lautet $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = -2t \sum_{i=1}^{d} \cos k_i$. (Der Gitterabstand ist $a = 1$.) Die Zustandsdichte ist gegeben durch

$$N(\epsilon) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, \delta(\epsilon - \epsilon_{\boldsymbol{k}}) \, .$$

Im folgenden wird das Verhalten von $N(\epsilon)$ im Grenzfall $d \to \infty$ untersucht.

a) Wir definieren die Fourier-Transformierte $\Phi(s)$ der Zustandsdichte als

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \; N(\epsilon) \, e^{is\epsilon} \, .$$

Zeigen Sie, daß $\Phi(s)$ faktorisiert:

$$\Phi(s) = J(s)^d \, , \qquad \text{mit} \quad J(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \, \cos(2ts\cos k) \, .$$

b) Wir setzen nun $t = t_*/\sqrt{2d}$ und betrachten den Grenzfall $d \to \infty$, wobei wir t_* konstant halten. Entwickeln Sie $J(s)$ für große d bis einschließlich zur Ordnung $O(1/d)$.

Bemerkung: Die "Skalierung" von $t \propto 1/\sqrt{d}$ ist notwendig, um ein nichttriviales Ergebnis zu erhalten.

c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Funktion $\Phi(s)$ im Grenzfall $d \to \infty$.

d) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus c) die Zustandsdichte $N(s)$ im Grenzfall ∞, indem Sie die Fourier-Rücktransformation vornehmen.