

# Prüfung

# Atom- und Molekülphysik

25. Juni 2014

**Name:** \_\_\_\_\_Angelika Musterfrau\_\_\_\_\_

**Matrikelnummer:** \_\_\_\_\_82 106 9\_\_\_\_\_

Periode	Gruppe													
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII						
1	1 H 1,00797										2 He 4,0026			
2	3 Li 6,939	4 Be 9,022	5 B 10,81	6 C 12,01115	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984				10 Ne 20,183			
3	11 Na 22,9696	12 Mg 24,312	13 Al 26,9815	14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,064	17 Cl 35,453				18 Ar 39,948			
4	19 K 39,102	20 Ca 40,08	21 Sc 44,956	22 Ti 47,90	23 V 50,942	24 Cr 51,996	25 Mn 54,938	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71	36 Kr 83,80			
	29 Cu 63,54	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,909							
5	37 Rb 85,47	38 Sr 87,62	39 Y 88,905	40 Zr 91,22	41 Nb 92,906	42 Mo 95,94	43 Tc 99	44 Ru 101,07	45 Rh 102,905	46 Pd 106,4	54 Xe 131,3			
	47 Ag 107,87	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 J 126,9044							
6	55 Cs 132,905	56 Ba 137,34	57 La 138,91	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,85	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	86 Rn 222			
	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po 210	85 At 210							
7	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227	104 Rf 261,1	105 Db 262,1	106 Sg 263,1	107 Bh 262,1	108 Hs 265,1	109 Mt 266,1	110 Ds				
	58 Ce 140,12	59 Pr 140,907	60 Nd 144,24	61 Pm 145	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
	90 Th 232,038	91 Pa 231	92 U 238,03	93 Np 237	94 Pu 244	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 247	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 257	101 Md 256	102 No 256	103 Lr 258?

From: <http://physics.nist.gov/constants>

### Fundamental Physical Constants — Frequently used constants

Quantity	Symbol	Value	Unit	Relative std. uncert. $u_r$
speed of light in vacuum	$c, c_0$	299 792 458	$\text{m s}^{-1}$	exact
magnetic constant	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ $= 12.566 370 614... \times 10^{-7}$	$\text{N A}^{-2}$ $\text{N A}^{-2}$	exact
electric constant $1/\mu_0 c^2$	$\epsilon_0$	$8.854 187 817... \times 10^{-12}$	$\text{F m}^{-1}$	exact
Newtonian constant of gravitation	$G$	$6.673 84(80) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	$1.2 \times 10^{-4}$
Planck constant	$h$	$6.626 069 57(29) \times 10^{-34}$	J s	$4.4 \times 10^{-8}$
$h/2\pi$	$\hbar$	$1.054 571 726(47) \times 10^{-34}$	J s	$4.4 \times 10^{-8}$
elementary charge	$e$	$1.602 176 565(35) \times 10^{-19}$	C	$2.2 \times 10^{-8}$
magnetic flux quantum $h/2e$	$\Phi_0$	$2.067 833 758(46) \times 10^{-15}$	Wb	$2.2 \times 10^{-8}$
conductance quantum $2e^2/h$	$G_0$	$7.748 091 7346(25) \times 10^{-5}$	S	$3.2 \times 10^{-10}$
electron mass	$m_e$	$9.109 382 91(40) \times 10^{-31}$	kg	$4.4 \times 10^{-8}$
proton mass	$m_p$	$1.672 621 777(74) \times 10^{-27}$	kg	$4.4 \times 10^{-8}$
proton-electron mass ratio	$m_p/m_e$	1836.152 672 45(75)		$4.1 \times 10^{-10}$
fine-structure constant $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$\alpha$	$7.297 352 5698(24) \times 10^{-3}$		$3.2 \times 10^{-10}$
inverse fine-structure constant	$\alpha^{-1}$	137.035 999 074(44)		$3.2 \times 10^{-10}$
Rydberg constant $\alpha^2 m_e c/2h$	$R_\infty$	10 973 731.568 539(55)	$\text{m}^{-1}$	$5.0 \times 10^{-12}$
Avogadro constant	$N_A, L$	$6.022 141 29(27) \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$	$4.4 \times 10^{-8}$
Faraday constant $N_A e$	$F$	96 485.3365(21)	$\text{C mol}^{-1}$	$2.2 \times 10^{-8}$
molar gas constant	$R$	8.314 4621(75)	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$9.1 \times 10^{-7}$
Boltzmann constant $R/N_A$	$k$	$1.380 6488(13) \times 10^{-23}$	$\text{J K}^{-1}$	$9.1 \times 10^{-7}$
Stefan-Boltzmann constant $(\pi^2/60)\hbar^4/h^3 c^2$	$\sigma$	$5.670 373(21) \times 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	$3.6 \times 10^{-6}$
Non-SI units accepted for use with the SI				
electron volt (e/C) J	eV	$1.602 176 565(35) \times 10^{-19}$	J	$2.2 \times 10^{-8}$
(unified) atomic mass unit $\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	u	$1.660 538 921(73) \times 10^{-27}$	kg	$4.4 \times 10^{-8}$

**1) Quantisierungen****(6 Punkte)**

a) Nennen Sie 4 Beispiele für quantisierte physikalische Größen (jeweils mit der zugehörigen Einheit). (2 P)

Hier hätte man sich hübsch an der beigelegten Tabelle mit konstanten „inspirieren“ können.

Einige Beispiele

- Elementarladung  $e$  [C]
- Atomare Masseneinheit [kg]
- Energiequant in verschiedensten Formen [Js]:
  - Photonenenergie über Plancks Wirkungsquantum
  - Diskrete Energiezustände (z.B. Atomspektren)
  - Schwingungszustände in einem Potential (z.B. BEC)
  - Schwingungszustände von Molekülen
- Diskrete Wellenlängen in einem optischen Resonator [m]
- Quantisierte Drehimpulse im Atom oder Molekül [Js]:
  - Bahndrehimpuls (bzw. dessen Z-Komponente)
  - Elektronenspin
  - Kernspin
  - Rotationen vom Molekülen
- Daraus abgeleitet: Quantisierte magnetische Momente [ $N A^{-2}$ ]

b) Beschreiben Sie kurz, wie die Quantisierung dieser Größe experimentell nachgewiesen werden kann. (4 P)

Hier nur einige Beispiele:

- Millikan versuch, Frank Herz versuch, Anoden/Kathodenstrahlen
- Avogadro-Versuch, Elektrolyse, chemische Bindungen
- Diskrete Linien in den Spektren der Elemente, Laserspektroskopie
- Optische Abbildung von Schwingungs-Wellenfunktionen
- Spektroskopie der Emission eines Lasers, Interferenzversuche
- Stern-Gerlach Experiment, normaler und anomaler Zeeman Effekt, Spektroskopie von Molekülen

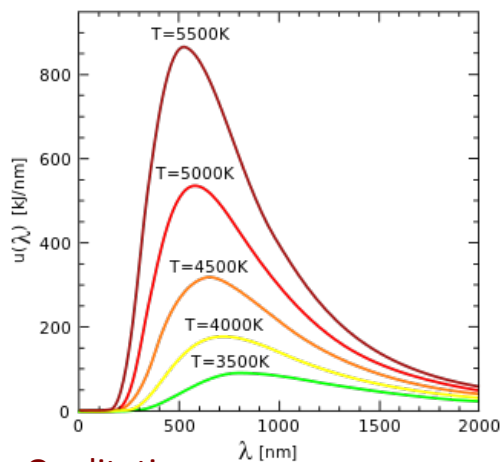
## 2) Schwarzkörperstrahlung/Wärmestrahlung (5 Punkte)

Zeichnen Sie (qualitativ) die spektrale Verteilung  $u(\lambda, T)$  der Strahlungsdichte über die Wellenlänge (in Mikrometer).

a) für die Oberfläche der Sonne ( $T = 6000 \text{ K}$ ,  $\lambda_{\text{max}} = 480 \text{ nm}$ ) (1 P)

b) Für eine Sonne, die um einen Faktor 2 heißer ist (1 P)

(Beachten Sie auch die Fragen c) und d) !)



Qualitativ:

- $\lambda_{\text{max}}$  verschiebt sich nach links ( $1/T$ )
- Fläche unter der Kurve nimmt massiv (x16) zu
- Kurven schneiden sich nicht

c) wie skaliert die Wellenlänge  $\lambda_{\text{max}}$ , bei der die maximale Leistung abgestrahlt wird, mit der Temperatur? (1 P)

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{const} = 0.29 \text{ cm K} \quad \text{Wiensches Verschiebungsgesetz}$$

d) wie skaliert die abgestrahlte Leistung mit der Temperatur? (1 P)  
(Die Antworten für c), d) sollten sich auch in der Skizze a), b) wiederfinden)

$$S = \delta T^4 \quad \text{mit} \quad \delta = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad \text{Stefan Boltzmann Gesetz}$$

e) Ordnen Sie folgende Begriffe in die Tabelle ein: (1 P)

- Röntgenstrahlen
- Mikrowellen
- Infrarotspektrum
- Gammastrahlen
- optisches Spektrum
- UV Spektrum
- Radiowellen

Wellenlänge	Name des entsprechenden Frequenzbereiches
100 m	<b>Radiowellen</b>
10 cm	<b>Mikrowellen</b>
10 $\mu\text{m}$	<b>Infrarotstrahlung</b>
500 nm	<b>Optisches Spektrum</b>
100 nm	<b>Infrarotlicht</b>
1 $\text{\AA}$	<b>Röntgenstrahlung</b>
1 pm	<b>Gammastrahlung</b>

**3) Balmer-Formel, Bohr'sches Atommodell (7 Punkte)**

a) Wie lautet die empirische Formel für die Übergangswellenlängen im Wasserstoff-Atom? (1 P)

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left[ \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \text{ mit } n_1, n_2 \text{ natürliche Zahlen}$$

b) Wie heißt die darin auftauchende Konstante, was ist ihr Wert und was ist ihre physikalischen Bedeutung? (1 P)

**Rydberg-Konstante:**

- **Stärke der Elektromagnetischen Wechselwirkung**
- **„Bindungsenergie“ des Elektrons im Wasserstoff-Atom ( $n_1=1$ ,  $n_2=\infty$ )**

c) Welches Kräftegleichgewicht bestimmt die „Planetenbahnen“ der Elektronen um den Kern? (Bitte Formel anschreiben.) (2 P)

**Zentripetalkraft = Coulombkraft**

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

d) Welches „Resonanzbedingung“ erzwingt die Quantisierung im Bohr'schen Atommodell? (Bitte Formel anschreiben.) (1 P)

**Umfang der Kreisbahn ist ganzzahliges Vielfaches der deBroglie Wellenlänge:**

$$2\pi r = n \cdot \lambda_{dB} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{\mu v}$$

e) Welche Elektronenradien sind demnach für die Elektronen im Wasserstoffatom erlaubt? (Bitte Formel anschreiben.) Welchen (ungefähren) Wert hat der Radius des Grundzustandes? (1 P)

**Formel aus d) nach Geschwindigkeit v auflösen:**  $v = n \frac{h}{2\pi \mu r}$

In die Formel aus c) einsetzen und nach Radius r auflösen:

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2} \equiv a_0 \frac{n^2}{Z} \quad \text{mit dem Bohr-Radius}$$

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2} = 5.2917 \times 10^{-11} \text{ m} \approx 0.5 \text{ \AA}$$

f) Wie skaliert dieser Radius für (1 P)

- das  $\text{He}^+$  Ion (1 Elektron,  $Z=2$ ) im Grundzustand?
- das  $\text{He}^+$  Ion im 3. angeregten Zustand?

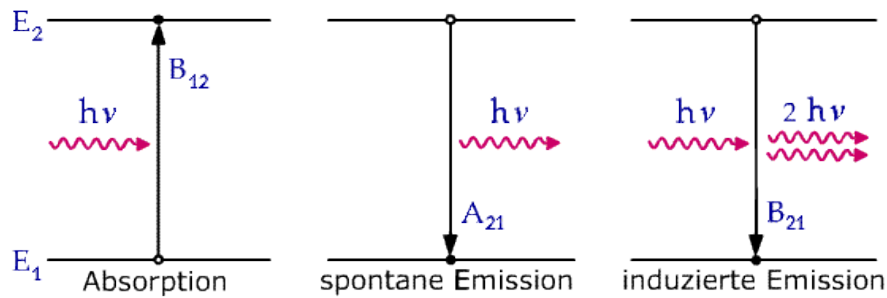
$$r \propto \frac{n^2}{Z}$$

$$n=1: r_{\text{He}^+} = \frac{1}{2} r_H,$$

$$n=3: r_{\text{He}^+} = \frac{9}{2} r_H$$

**4) Licht-Atom Wechselwirkung****(5 Punkte)**

a) Nennen und skizzieren Sie die 3 fundamentalen Wechselwirkungen zwischen einem (atomaren) 2-Niveau-System und resonantem Licht. (1 P)



b) Finden Sie jeweils ein Beispiel, in dem die genannte Wechselwirkung die dominante Rolle spielt. (2 P)

**Absorption: Sonnenbrillen, jegliche form von Aufheizen durch Licht, Absorptionsspektroskopie**

**Spontane Emission: Glühlampe, Leuchtstoffröhre, Laser unterhalb der Laserschwelle, Fluoreszenzspektroskopie**

**Induzierte Emission: Laser, Maser**



c) Skizzieren sie (qualitativ) für ein 2-Niveau-System mit der Zerfallskonstanten  $\gamma \neq 0$  die Wahrscheinlichkeit  $P_{\text{exc.}}(\nu)$ , ein Atom im angeregten Zustand zu finden, wenn die Laserfrequenz über die Resonanz gescannt wird. Zeichnen Sie diese Kurve für verschiedene Laserintensitäten. (2 P)

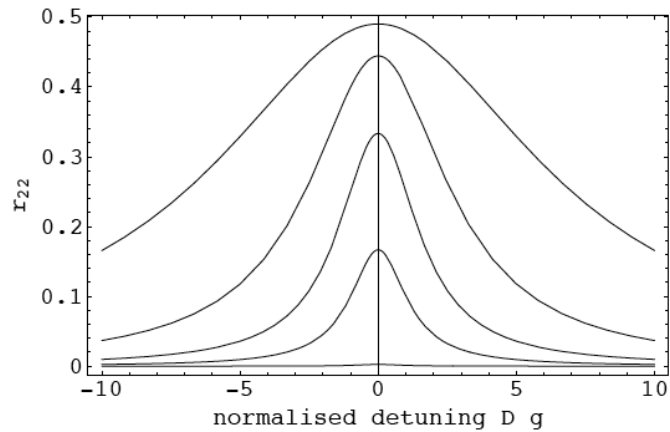


Figure 1.3: Driven Atom with spontaneous emission. The probability to find the atom in the excited state is plotted for various driving strength  $\Omega_{Rabi} = \gamma$ ,  $\Omega_{Rabi} = 0.1\gamma$ ,  $\Omega_{Rabi} = 2\gamma$ ,  $\Omega_{Rabi} = 4\gamma$ ,  $\Omega_{Rabi} = 10\gamma$ . One clearly sees the broadening and saturation of the line

**5) Laser****(9 Punkte)**

a) Wie lautet das Beer'sche Absorptionsgesetz (Formel anschreiben) (1 P)

$$I(\nu, z) = I(\nu, 0) \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot z}$$

mit

$$\alpha(\nu) = (N_1 - N_2) \sigma(\nu)$$

b) Unter welcher Bedingung kann in einem Medium Licht verstärkt werden?  
Was ist die „Schwellwertbedingung“ für Lasertätigkeit? (2 P)

$$\alpha(\nu) < 0$$

 **$N_2 > N_1$  („Besetzungsinversion“)****Unter Berücksichtigung von Verlusten:**

$$\Delta N = N_2 - N_1 \geq \Delta N_{Schw} = \frac{\gamma(\nu)}{2\sigma(\nu) \cdot L}$$

c) Zeichnen Sie ein mögliches Übergangsschema für einen Laser, (2 P)  
beschriften Sie mit den Begriffen

- langlebig
- kurzlebig
- stabil
- Anregung/Pumpe
- Lasertätigkeit

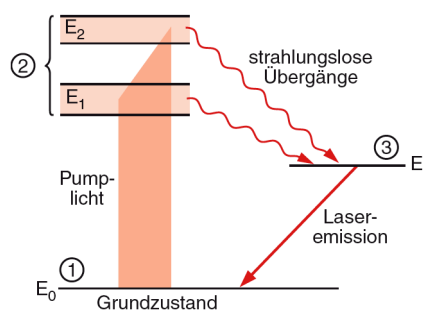


Abb. 8.6. Termschema des Rubin-Lasers

Der Resonator eines Titan-Saphir-Lasers ist exakt 1.00 m lang. Der Laserkristall verstärkt optimal bei 800 nm Wellenlänge mit einem sehr breiten, symmetrischen Verstärkungsprofil. Die niedrigste Wellenlänge, bei der gerade noch die Schwellwertbedingung erfüllt wird, liegt bei 785 nm.

a) Wie groß ist der Frequenzabstand zweier benachbarter longitudinaler Lasermoden, die in diesem Laser verstärkt werden? (1 P)

**Resonanzbedingung für Stehwellen:**  $L = n \frac{\lambda}{2}$ .

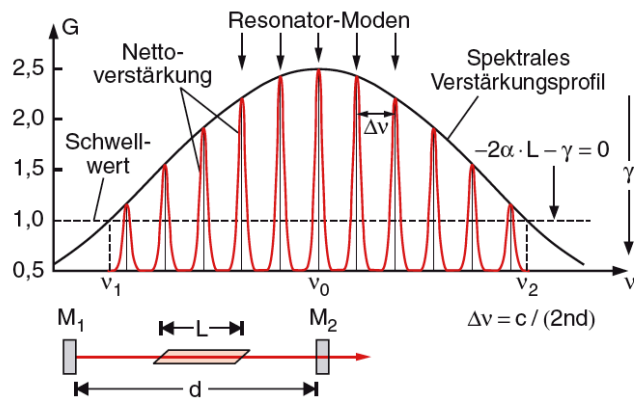
**Daraus folgt für die Resonanzfrequenzen:**  $\nu_n = n \frac{c}{2L}$  (wegen  $c = \lambda \cdot \nu$ )

**Für zwei benachbarte Frequenzen:**

$$\Delta \nu = \nu_{n+1} - \nu_n = (n+1-n) \frac{c}{2d} = \frac{c}{2d} = \frac{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}{2 \cdot 1m} = 150 \text{ MHz}.$$

b) Wie viele Lasermoden werden insgesamt von diesem Laser abgestrahlt? (Tip: es lohnt sich, hier in Laserfrequenzen statt Wellenlängen zu rechnen.)

(1 P)



$$\nu_0 = \frac{c}{800 \text{ nm}} = 3,75 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \nu_1 = 3,68 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = \frac{c}{785 \text{ nm}} = 3,82 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$N = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\Delta \nu} = \frac{1,4 \times 10^{13} \text{ Hz}}{150 \times 10^6 \text{ Hz}} \approx 93,000 \text{ Schwingungsmoden}.$$

c) In den Laserresonator aus a),b) wird nun ein zweiter, sehr viel kürzerer Resonator als „Filter“ eingebracht. Dieser besteht aus einer dünnen Folie, die auf beiden Seiten als halbdurchlässiger Spiegel beschichtet ist. Der Filter ist so konzipiert, dass er nur genau bei Resonanz transmittiert. Wie dick darf diese Folie (maximal) sein, um den Titan-Saphir-Laser zur Monomodenen-Emission zu zwingen? (Die Dicke der Spiegelschichten wird vernachlässigt.)

(2 P)

**Der zweite Resonator muss so gebaut sein, dass der Abstand zweier Resonatormoden mindestens  $|\nu_0 - \nu_1|$  bzw.  $|\nu_0 - \nu_2|$  beträgt:**

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2d} \geq |\nu_0 - \nu_1| = 7.17 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

**Aufgelöst nach d ergibt sich  $d \leq 21 \mu\text{m}$ .**

**(manchmal wurde die Hälfte berechnet, das habe ich gelten lassen)**

**6) Mechanische Effekte von Licht / Laserkühlung (4 Punkte)**

Wir betrachten ein Rubidium-87 Atom und die Wechselwirkung mit resonantem Laserlicht. (Das System kann als geschlossenes 2-Niveau-System angenommen werden.)

- Wellenlänge des Übergangs: 780.24 nm
- Lebensdauer:  $\tau = 26.24$  ns

a) Wie groß ist die natürliche Linienbreite des Lichts, welches von einem (ruhenden) Atom abgestrahlt wird? (1 P)

b) Wie groß ist die Änderung der Geschwindigkeit des Atoms bei Absorption eines einzelnen Photons? (1 P)

c) Wie groß ist die maximale Beschleunigung, die ein resonanter Laserstrahl auf ein Rubidiumatom ausüben kann. Geben Sie dies in Einheiten der Erdbeschleunigung an. (Tip: die maximale Streurate entspricht der halben Linienbreite.) (1 P)

d) Beschreiben Sie (mit Worten), warum sich aus der Wechselwirkung eines Atoms mit einem Laserstrahl eine gerichtete Kraft (in welche Richtung?) ergibt. (1 P)