Musterlösung zur
Prüfung
Atom- und Molekülphysik

21. Juni 2017

Name: __Angelika Musterfrau______

Matrikelnummer: __1234567890_____________

Note	Punkte	Häufigkeit
1	36 bis 30.5	17
2	30 bis 24.5	11
3	24 bis 18.5	0
4	18 bis 12.5	0
nicht bestanden	12 und weniger	0

1) Bohr'sches Atommodell des H-Atoms (8 Punkte)

a) Wie lautet die empirische Formel für die Übergangswellenlängen im Wasserstoff-Atom? (1 P)

$$\frac{1}{\lambda} = Ry\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]$$ **mit n_1, n_2 natürliche Zahlen**

b) Wie heißt die darin auftauchende Konstante, was ist ihr Wert und was ist ihre physikalischen Bedeutung? (Tip: betrachte dazu $n_2 \rightarrow \infty$)

Rydberg-Konstante

- **Wert: 10 973 731,5... m^{-1} (siehe beigelegt Tabelle)**
- **Charakterisiert die „Stärke" der Elektromagnetischen Wechselwirkung**
- **Entspricht der „Bindungsenergie" des Elektrons im Wasserstoff-Atom (n_1=1, n_2=∞), bzw. 1/Wellenlänge des Lichtes, welches zur Ionisierung eingestrahlt werden muss**

(1 P)

c) Welches Kräftegleichgewicht bestimmt die „Planetenbahnen" der Elektronen um den Kern? (Bitte Kräfte benennen + Formel anschreiben. Bitte verwenden Sie „$\mu = (m_e \times m_p) / (m_e + □ m_p) \approx m_e$" für die reduzierte Masse. Bitte nicht eine Kraft und ein Potential verwechseln!)

(2 P)

Zentripetalkraft = Coulombkraft

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4pe_0}\frac{Ze^2}{r^2}$$

d) Welches „Resonanzbedingung“ erzwingt die Quantisierung im Bohr’schen Atommodell? (Bitte beschreiben und/oder hinmalen + Formel anschreiben.)

(2 P)

Umfang der Kreisbahn ist ganzzahliges Vielfaches der deBroglie Wellenlänge:

$2\pi r = n \cdot \lambda_{dB}$ **mit n = 1, 2, ... und** $\lambda_{dB} = \frac{h}{\mu v}$

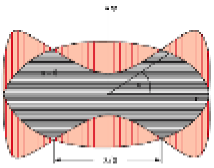


Abb. 3.39. Stehende de-Broglie-Welle zur Illustration der Quantenbedingung im Bohrschen Atommodell

e) Welche Elektronenradien sind demnach für die Elektronen im Wasserstoffatom erlaubt? (Bitte Formel anschreiben.) Welchen (ungefähren) Wert hat der Radius des Grundzustandes? (2 P)

$r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi \mu Z e^2} \equiv a_0 \frac{n^2}{Z}$ **mit dem Bohr-Radius**

$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2} = 5.2917 \times 10^{-11} m \approx 0.5$ **Å**

Hier ist insbesondere die Skalierung $r \mu \frac{1}{m}$ **interessant (Siehe Frage 2d)**

2) Schrödinger Gleichung, Myonium (8 Punkte)

Das Myonium ist ein Atom-ähnliches Gebilde aus einem Anti-Myon (1 positive Elementarladung, m = 0.113 u) und einem Elektron. Es „lebt" nur einige Mikrosekunden, die endliche Lebensdauer soll aber hier vernachlässigt werden.

a) Geben Sie die (zeitunabhängige) Schrödingergleichung für das Myonium-Atom an. (1 P)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]\psi_{n,l,m_l}(\vec{r})=E_{n,l,m_l}\psi_{n,l,m_l}(\vec{r})$$

mit Z=1 (1 positive Kernladung)

und

$$m=\frac{m_{elektron}\times m_{myon}}{m_{elektron}+m_{myon}}$$

die reduzierte Masse

(Hier haben erstaunlich viele „Probleme" mit dem Vorzeichen des Coulomb-Potentials gehabt!)

b) Wie lautet der Ansatz für die Wellenfunktion, mit dem diese Gleichung gelöst werden kann? Welche Eigenschaft des Wechselwirkungspotentials macht man sich dabei zu Nutze? (2 P)

$\psi(r,\vartheta,\varphi)=R(r)\cdot Y(\vartheta,\varphi)$ **mit** $Y(\vartheta,\varphi)=\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)$**, das ist ein Zentralpotential (Abhängig nur vom Elektron-Kern-Abstand, nicht vom Winkel)**

c) Welche 3 Quantenzahlen ergeben sich bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Myonium-Atom. Was ist ihre physikalische Bedeutung? Welche Werte können sie annehmen?

(3 P)

n = Hauptquantenzahl in Anlehnung an die „Bahnen" im Bohrschen Atommodell, n = 1, 2, 3, ...

l = Drehimpulsquantenzahl, beschreibt die Orbitalform (s, p, d...), l = 0,1,...,(n-1)

m_l = Magnetische (oder Zeeman) Quantenzahl, z-Komponente des Drehimpulses, $m_l = -l, -l+1, \dots l-1, l$

d) Vergleichen wir das Myonium-Atom und das Wasserstoff-Atom: was bleibt gleich, was ändert sich (und wie)? Bitte machen Sie eine (rein qualitative) Aussage über

- Die generelle Niveaustruktur
- Die Größe des jeweiligen Grundzustandes
- Die Energieniveaus

(Tip: Betrachte noch einmal die Rolle der reduzierten Masse in Frage 1c und 1e) (2 P)

Der Einzige Unterschied zum Wasserstoff-Atom besteht darin, dass das Anti-Myon grob einen Faktor 10 leichter ist als das Proton

→ <u>die generelle Niveaustruktur bleibt erhalten</u>

Vergleichen wir die reduzierten Massen:

Wasserstoff – Atom: $m_H = \frac{m_{elektron} \cdot m_{proton}}{m_{elektron} + m_{proton}}$

wobei $m_{proton} / m_{elektron} = 1836$ **(siehe gegebene Konstanten), und damit**

$$m_H = \frac{1836}{1837} m_{elektron} = \left(1 - \frac{1}{1837}\right) m_{elektron}$$

Myonium-Atom:

$$m_H = \frac{m_{elektron} \cdot m_{myon}}{m_{elektron} + m_{myon}} = \frac{m_{elektron} \cdot 0.113 m_{proton}}{m_{elektron} + 0.113 m_{proton}} = \frac{m_{elektron} \cdot (0.113 \cdot 1836) m_{proton}}{m_{elektron} + (0.113 \cdot 1836) m_{proton}} =$$
$$\frac{207.5}{208.5} m_{elektron} = \left(1 - \frac{1}{208.5}\right) m_{elektron}$$

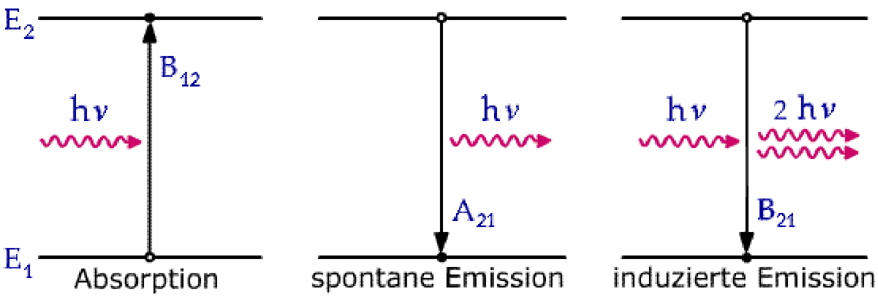
Damit ist die reduzierte Masse im Myonium-Atom etwas kleiner als im H-Atom (das Anti-Myon im Kern bewegt sich stärker mit und lässt das Elektron leichter wirken)

→ mit Frage 1e sind daher die <u>Elektronenradien etwas größer als beim H-Atom</u>

→ nachdem sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie mit 1/r skalieren, sind die <u>Bindungsenergien etwas geringer als beim H-Atom</u>

3) Licht-Atom Wechselwirkung, Laser (10 Punkte)

a) Nennen und skizzieren Sie die 3 fundamentalen Wechselwirkungen zwischen einem (atomaren) 2-Niveau-System und resonantem Licht. (3 P)



b) Finden Sie jeweils ein Beispiel, in dem die genannte Wechselwirkung die dominante Rolle spielt. (3 P)

Absorption: Sonnenbrillen, jegliche form von Aufheizen durch Licht, Absorptionsspektroskopie

Spontane Emission: Glühlampe, Leuchtstoffröhre, Laser unterhalb der Laserschwelle, Fluoreszenzspektroskopie

Induzierte Emission: Laser, Maser

c) Wie lautet das Beer'sche Absorptionsgesetz (Formel anschreiben) (1 P)

$$I(n,z)=I(n,0)\times e^{-a(n)\times z}$$

mit

$$a(n)=\left(N_1-N_2\right)s(n)$$

d) Unter welcher Bedingung kann in einem Medium Licht verstärkt werden? Was ist die „Schwellwertbedingung“ für Lasertätigkeit? (1 P)

$$a(n) < 0$$

$N_2 > N_1$ („Besetzungsinversion“)

Unter Berücksichtigung von Verlusten:

$$DN = N_2 - N_1 \geq DN_{Schw} = \frac{g(n)}{2s(n) \cdot L}$$

e) Zeichnen Sie ein mögliches Übergangsschema für einen Laser, beschriften Sie mit den Begriffen (2 P)

- langlebig
- kurzlebig
- stabil
- Anregung/Pumpe
- Lasertätigkeit

Beispiel: Rubinlaser (hier waren sehr viele richtige Antworten möglich)

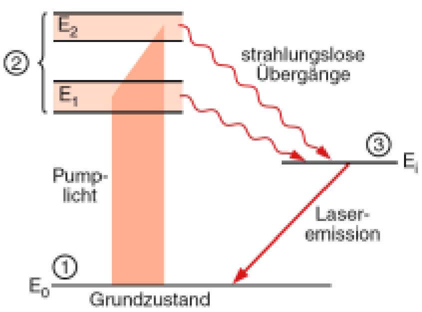


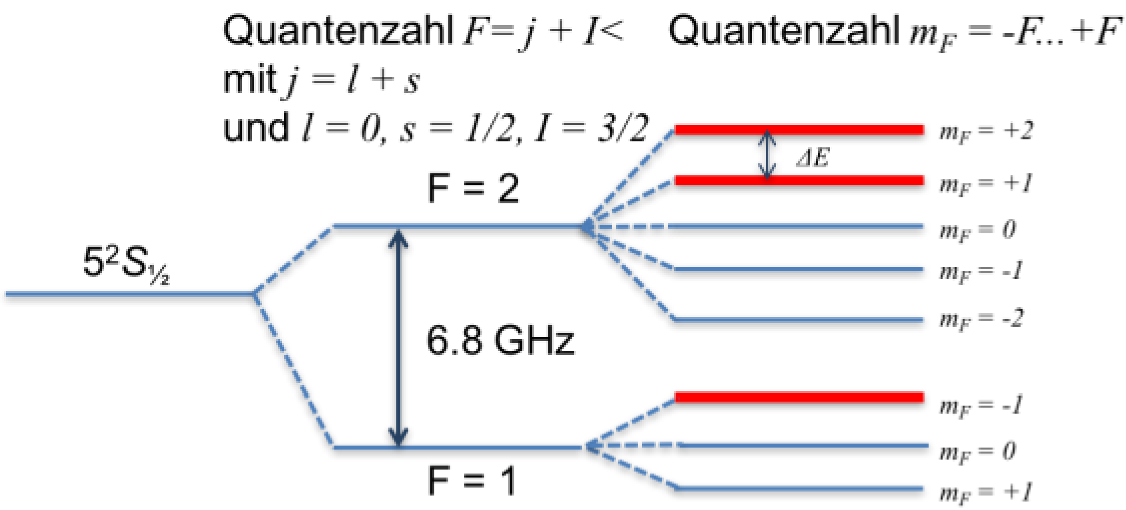
Abb. 8.6. Termschema des Rubin-Lasers

4) Eigenschaften von ^{87}Rubidium, Levitation (10 Punkte)

a) Wir betrachten den $5^2S_{½}$ Grundzustand des ^{87}Rubidium-Atoms mit Kernspin I = 3/2. Zeichnen Sie dafür ein „Energie-Diagramm" welches folgende Effekte veranschaulicht:

1. Hyperfeinaufspaltung (welches ist die zugehörige Quantenzahl, welche Werte nimmt sie an?)
2. Zeemann-Aufspaltung für das Regime schwacher Felder (welches ist die zugehörige Quantenzahl, welche Werte nimmt sie an? Beachte dazu auch Frage 4b für die Reihenfolge der Niveaus)

(4 P)



Keine Hyperfein-W.W.
$B = 0$

mit Hyperfein-W.W.
$B = 0$

mit Hyperfein-W.W.
$B \neq 0$

Das hier beim F=1 der m_F=-1 Zustand oben liegt (weil er Energie gewinnt im B-Feld) ist ein bissl gemein, das habe ich in der Vorlesung nie so gezeichnet und auch entsprechend keinen Punkt abgezogen, falls es andersherum gezeichnet war.

Die Rot markierten Zustände sind diejenigen, die sich in einem magnetischen Minimum fangen lassen (siehe nächste Frage)

b) Die Energieverschiebung der einzelnen Zeemann-Niveaus beträgt $\Delta E = m_F \cdot g_F \cdot \mu_B \cdot |B|$, dabei ist $g_{F=1} = -1/2$ und $g_{F=2} = +1/2$ und Bohr's Magneton $\mu_B = 9.274 \times 10^{-20}$ J/Gauss. Welche der oben gezeichneten Zeeman-Zustände können in einem Minimum des magnetischen Feldes gefangen werden? (Bitte irgendwie markieren oder aufschreiben).

(2P)

Hier haben einige einen kleinen Denkfehler gemacht: Das Atom (in einem bestimmten Quanten-Zustand) wird immer versuchen, seine Energie zu minimieren. Die Frage war, welche Atome lassen sich in einem MINIMUM des B-Feldes fangen, also welche Atome haben dort MINIMALE Energie.
Also: wann ist ΔE klein wenn $|B|$ ist. Das gilt, wenn $m_F \cdot g_F > 0$, daraus ergeben sich die oben markierten 3 Zustände.
Wer genau die „anderen" drei Zustände markiert hat, hat einen Punkt bekommen.
(m_F=0 reagiert überhaupt nicht auf ein magnetisches Feld → nicht gefangen).

c) Wir möchten nun ein ^{87}Rubidium Atom „magnetisch levitieren“. Betrachte dazu nur die vertikale Achse (in Richtung der Erdbeschleunigung), das Atom wird als ruhend angenommen. Wie groß muss ein Magnetfeldgradient sein, um die Erdbeschleunigung zu kompensieren und das Atom in Ruhe zu halten? (Tip: hier muss man einen spezifischen Zeeman-Zustand aussuchen, die Antwort ist abhängig von dieser Wahl).

(2P)

Für eine Levitation muss das magnetische Potential die (linearisierte) räumliche Variation des Schwerepotentials ausgleichen:

$$m \cdot g \cdot h = \Delta E(x) - \Delta E(x+h) = m_F \cdot g_F \cdot \mu_B \cdot \left(B(x) - B(x+h)\right)$$

und damit

$$\frac{B(x) - B(x+h)}{h} = \frac{m \cdot g}{m_F \cdot g_F \cdot \mu_B}$$

An dieser Stelle habe ich Ihnen dann leider oben einen FALSCHEN Wert für das Bohr-Magneton angegeben, (verdammter Gauss!), der richtige Wert lautet $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-28}$ J/Gauss

Ich habe alles als richtig gelten lassen, was den falschen Wert berücksichtigt (den richtigen natürlich auch!)

$$B' = \frac{87 \cdot 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{m_F \cdot g_F \cdot 9.27 \times 10^{-28}\,\mathrm{J/Gauss}} = \frac{1}{m_F \cdot g_F} \cdot 1528 \frac{\mathrm{Gauss}}{m} = \frac{1}{m_F \cdot g_F} \cdot 15.3 \frac{\mathrm{Gauss}}{cm}$$

mit $g_{F=1} = -1/2$ **und** $g_{F=2} = +1/2$ **ergeben sich also folgende Möglichkeiten:**

F=1: m_F= +/-1 B’= -/+ 30.6 G/cm

(auch high-field-seeker lassen sich levitieren!)

F= 2: m_F= +/-1 B’= +/- 30.6 G/cm

m_F= +/-2 B’= +/- 15.3 G/cm

(der aus dem falsch angegebenen Wert des Bohr Magnetons berechnete Wert ist dann entsprechend um einen Faktor 10^{-8} kleiner, ich bitte vielmals um Entschuldigung!)

d) Wir möchten nun ein ^{87}Rubidium Atom „optisch levitieren". Betrachte dazu nur die vertikale Achse (in Richtung der Erdbeschleunigung"), das Atom wird als ruhend angenommen. Wie viele Photonen (pro Sekunde) muss ein Atom aus einem aufwärts gerichteten Laser (resonant bei 780 nm) absorbieren, um die Erdbeschleunigung zu kompensieren und das Atom in Ruhe zu halten? (Die spontane Emission und der damit verbundenen Rückstoßimpuls mittels sich heraus und kann hier vernachlässigt werden).

(2P)

Pro absorbiertem Photon ändert sich die Geschwindigkeit des Atoms um 5.88 mm/s (siehe „recoil velocity" in den gegebenen Werten für Rubidium)

Um die Erdbeschleunigung von 9.81 m/s^2 auszugleichen brauche ich also einen Photonenfluss n/Δt von

$9.81\frac{m}{s^2} = \frac{n}{\Delta t} 5.88\frac{mm}{s}$ **und damit** $\frac{n}{\Delta t} = \frac{9810}{5.88}\frac{1}{s} = 1679\frac{1}{s}$

Wer die recoil velocity nicht nachsehen wollte, konnte sie auch selbst ausrechnen:

p=mv → v = p/m = h/(λm)

h = 6.62 x 10^{-34} Js [Js = kg m^2/s]
λ = 780 x 10^{-9} m
m = 87 x amu = 87 x 1,66 x 10^{-27} kg

Ausrechnen ergibt v = 5.88 x 10^{-3} m/s = 5.88 mm/s