

Beispiele AKT1, SS 2012

1. Zeigen Sie

$$l_z = -i\hbar\partial_\varphi.$$

2. Zeigen Sie, dass l_z Rotationen um die z-Achse erzeugt.

3. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}, \quad m_l \in Z,$$

2π -periodisch und orthonormiert sind.

4. Zeigen Sie, dass die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators die Vertauschungsregeln

$$[l_i, l_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}l_k, \quad i, j, k \in \{x, y, z\}$$

erfüllen.

Kennen Sie einen tieferen Grund, warum in rotationssymmetrischen Problemen nur gemeinsame Eigenfunktionen von l^2 und l_z bestimmt werden können?

5. Begründen Sie kurz, warum in

$$\hat{\Pi} \hat{Y}_{\ell m_\ell}(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi}) \hat{\Pi} = (-1)^\ell \hat{Y}_{\ell m_\ell}(\hat{\vartheta}, \hat{\varphi}).$$

der Paritätsoperator zweimal auftritt.

6. Bohrsches Atommodell

- (a) Welche Hinweise kann man verwenden, um die Bohrschen Formeln für r_N , v_N und E_N relativ leicht reproduzieren zu können?
- (b) Überprüfen Sie, ob die Elektronen nach Bohrs Modell das dritte keplersche Gesetz erfüllen.

7. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie eines Zweiteilchensystems sowohl klassisch als auch quantenmechanisch in die Energie der Schwerpunkts- und Relativbewegung zerlegt werden kann.
8. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie sowohl klassisch als auch quantenmechanisch in Rotationsenergie und Energie der radialen Bewegung zerlegt werden kann. Geben Sie die algebraischen Ausdrücke für die Energiebeiträge und Hamiltonoperatoren an.
9. Einteilchenzustände
- Begründen Sie, warum ein Einelektronenzustand durch vier Quantenzahlen festgelegt werden muss.
 - Was versteht man unter dem j-Schema und dem m-Schema?
10. Wenden Sie die Leiteroperatoren ℓ_{\pm} auf die Bahndrehimpulseigenzustände eines p-Elektrons $|\ell m_{\ell}\rangle = |1 m_{\ell}\rangle$ und verwenden Sie dabei die Formel
- $$\ell_{\pm}|\ell m_{\ell}\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m_{\ell}(m_{\ell} \pm 1)}|\ell m_{\ell} \pm 1\rangle$$
11. Spinkugelfunktionen
- Zeigen Sie, dass die Spinkugelfunktionen Eigenfunktionen von j_z sind.
 - Wie lautet die Spinkugelfunktion zu $j = l + \frac{1}{2}$ und $m = j$?
 - Wie kann man aus dieser Funktion weitere Spinkugelfunktionen konstruieren?
12. H-Atom quantenmechanisch
- Schreiben sie im j-Schema alle möglichen Zustände für $N = 1, 2$ und 3 in einer Tabelle auf und geben sie die spektroskopische Bezeichnungsweise und die Zahl der Zustände an.
 - Skizzieren sie maßstabsgetreu die energetische Anordnung der Zustände und ordnen sie jedem Niveau die Zustände ihrer Tabelle zu.