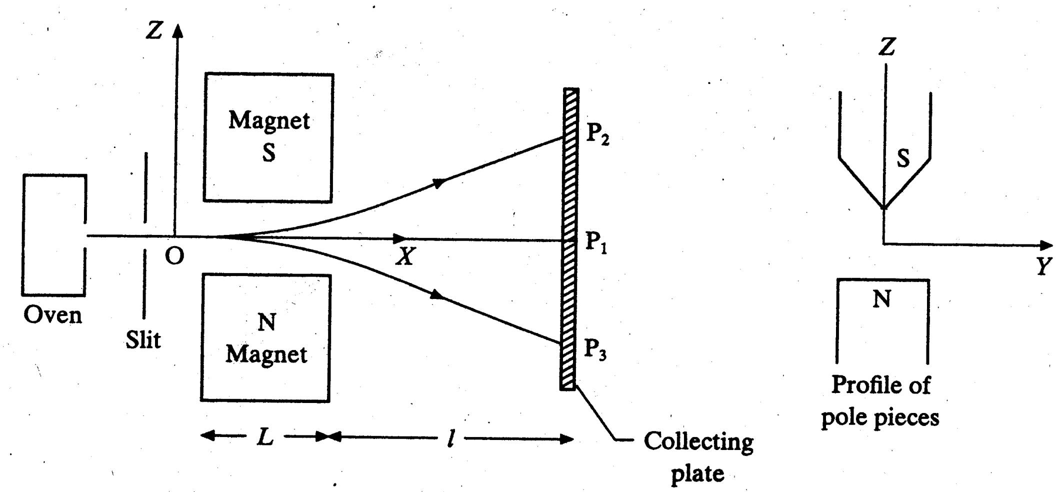
Übungen AKT 1, SoSe 2013
Prof. Dr. Arno Rauschenbeutel
Dr. Philipp Schneeweiß
Dr. Jürgen Volz
Blatt 2, Besprechung am 17. April 2013

Aufgabe 1, Stern-Gerlach Experiment

Wir betrachten eine Stern-Gerlach-Apparatur für Silberatome (siehe Abbildung) mit folgenden Daten: Ofentemperatur $T = 600\ K$, Länge des Magneten $L = 0,1$ m, Abstand vom Magneten zum Detektor $l = 1$ m, Feldgradient $\partial B_z/\partial z = 10^3$ T m^{-1}. Berechnen Sie den Abstand P_2P_3 auf dem Schirm.

Hinweise: Gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeit der Silberatome $(3k_BT/M)^{1/2}$ ist, wobei k_B die Boltzmannkonstante und M die Masse eines Silberatoms ist. Die Projektion des magnetischen Moments auf die Magnetfeldachse kann für Silber die Werte $\mu_z = \pm\mu_B$ annehmen, wobei μ_B das Bohrschen Magneton ist.



Aufgabe 2, Wiederholung zur Drehimpulsalgebra

Es seien J_x, J_y und J_z drei Operatoren, die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen: $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, $[J_y, J_z] = i\hbar J_x$, $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$. Wir definieren $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ sowie die „Leiteroperatoren“ $J_+ = J_x + iJ_y$ und $J_- = J_x - iJ_y$.

a.) Zeigen Sie, dass $\mathbf{J}^2$ mit jeder der Komponenten von $\mathbf{J}$ vertauscht, also $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0$. Wir können also eine Basis finden, in der zugleich $\mathbf{J}^2$ und z.B. J_z diagonal sind. Die zugehörigen Basisvektoren nennen wir $|j, m_j\rangle_z$. Es gilt (s. Vorlesung) $\mathbf{J}^2\,|j, m_j\rangle_z = j(j+1)\hbar^2\,|j, m_j\rangle_z$ mit $2j \in \mathbb{N}$ sowie $J_z\,|j, m_j\rangle_z = m_j\hbar\,|j, m_j\rangle_z$ mit $-j \leq m_j \leq j$. Zeigen Sie $[J_z, J_+] = \hbar J_+$, $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$, sowie $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

b.) Beweisen Sie, dass $J_+\,|j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor von J_z zum Eigenwert $m_j + 1$ ist, sowie dass $J_-\,|j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor zum Eigenwert $m_j - 1$ ist. Berechnen Sie weiter die Produkte J_+J_- und J_-J_+ und erhalten Sie daraus eine praktische Formel für $\mathbf{J}^2$, die nur J_-, J_+ und J_z enthält.

c.) Statt der Basis $|j, m_j\rangle_z$, in der $\mathbf{J}^2$ und J_z diagonal sind, kann man auch z.B. die Basis $\left|j, m_j'\right\rangle_x$ wählen, in der $\mathbf{J}^2$ und J_x diagonal sind. Drücken Sie für den Spezialfall des Spins ($s = 1/2$) die Zustände $|s, m_s\rangle_z$ in der x-Basis $\{|s, m_s\rangle_x\}$ und in der y-Basis $\{|s, m_s\rangle_y\}$ aus.

Aufgabe 3, Erwartungswerte der Spin-Operatoren
Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle s_x \rangle$, $\langle s_y \rangle$, $\langle s_z \rangle$ für einen Spin-1/2-Zustand $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Aufgabe 4, Projektionsoperatoren
Untersuchen Sie die Wirkung der Operatoren

$$\begin{aligned} \pi_+ &= 1/2\,(\mathbf{I} + \sigma_z) \\ \pi_- &= -1/2\,(\mathbf{I} - \sigma_z) \end{aligned}$$

mit dem Einheitsoperator $\mathbf{I}$ und der Pauli-Matrix σ_z auf einen beliebigen Spinor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Was ergibt π_+^2, π_-^2, $\pi_+\pi_-$ und welches sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von π_+ und π_-?

Aufgabe 5, Kopplung von Bahndrehimpuls und Spin
In der Vorlesung wurde der Hamilton-Operator $\hat{H}_{ls}$ für die Spin-Bahn-Kopplung bereits eingeführt:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ls} &= \xi(r)\;\hat{l} \cdot \hat{s} \\ \xi(r) &= \frac{1}{2m_0^2c^2}\,\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$

Die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_{n,l,m_l,m_s=+1/2} &= R_{n,l}Y_l^{m_l}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_{n,l,m_l,m_s=-1/2} &= R_{n,l}Y_l^{m_l}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sollen in ein System mit j^2, l^2, s^2, m_j transformiert werden:

$$\begin{aligned} |j, m_j, l, s\rangle &= \sum_{m_s=\pm 1/2} \langle l, m_l, s, m_s | j, m_j\rangle\, |l, m_l, s, m_s\rangle \\ m_j &= m_l + m_s\ . \end{aligned}$$

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten $\langle l, m_l, s, m_s | j, m_j \rangle$ für die Kopplung eines Drehimpulses (l, m_l) mit dem Spin (s=1/2, $m_s = \pm 1/2$) zum Gesamtdrehimpuls (j, m_j) lauten:

j	$m_s = +1/2$	$m_s = -1/2$
$l + 1/2$	$\sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}}$
$l - 1/2$	$-\sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}$

a) Zeigen Sie, dass Sie die Basisfunktionen für $m_j = m_l + 1/2$ schreiben können als

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{n,l,j=l+1/2,m_s} &= \sqrt{\frac{l+m_l+1}{2l+1}} R_{n,l} Y_l^{m_l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l-m_l}{2l+1}} R_{n,l} Y_l^{m_l+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\bar{\psi}_{n,l,j=l-1/2,m_s} &= -\sqrt{\frac{l-m_l}{2l+1}} R_{n,l} Y_l^{m_l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+m_l+1}{2l+1}} R_{n,l} Y_l^{m_l+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Produkt $\hat{l} \cdot \hat{s} = \hat{l}_x \hat{s}_x + \hat{l}_y \hat{s}_y + \hat{l}_z \hat{s}_z$, wobei

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm i \hat{l}_y$, mit $\hat{l}_\pm Y_l^{m_l} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m_l(m_l \pm 1)} Y_l^{m_l \pm 1}$.

c) Berechnen Sie nun den Eigenwert a aus $\hat{l} \cdot \hat{s} |j, m_j, l, s\rangle = a |j, m_j, l, s\rangle$ für $j = l \pm 1/2$, mit den Funktionen aus Teilaufgabe a).

d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Eigenwerten aus $\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$ für $j = l \pm 1/2$.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle j, m_j, l, s | \xi(r) \hat{l} \cdot \hat{s} | j, m_j, l, s \rangle$. Hinweis: $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$ wurde in der Vorlesung angegeben.

Aufgabe 6, Störungstheorie

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, dass in ein statisches homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ eingebracht wird, das parallel zu Oz ausgerichtet ist. Zum in der Vorlesung behandelten Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ muss dann der Stark-Hamiltonoperator $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ addiert werden, der die Wechselwirkung des elektrischen Dipolmoments $e\vec{r}$ des Atoms mit dem Feld $\vec{E}$ beschreibt. Es gilt

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = -e\vec{E} \cdot \vec{r} = -eEz \ .$$

Da weder $\hat{H}_0$ noch $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ auf die Spinvariablen wirken, vernachlässigen wir die Quantenzahl m_{s}.

Selbst für die stärksten im Labor realisierbaren elektrischen Felder gilt $\langle \hat{H}_{\mathrm{S}} \rangle \ll \langle \hat{H}_0 \rangle$, sodass die durch $\vec{E}$ hervorgerufene Energieverschiebung mittels Störungsrechnung bestimmt werden kann. Zeigen Sie, dass für den $1s$-Zustand (d.h. $n = 1$, $l = 0$ und $m_l = 0$) die Energieverschiebung in erster Ordnung in E verschwindet, also mindestens quadratisch in E ist.