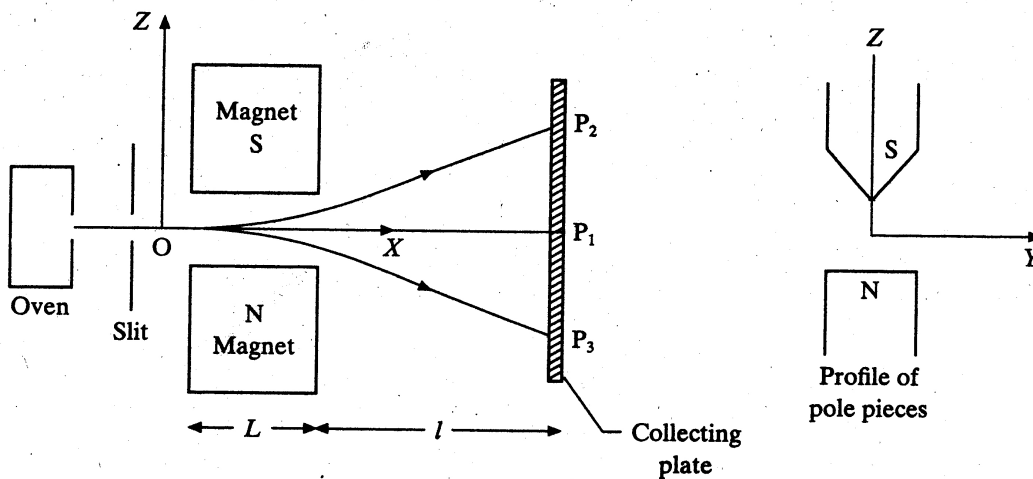


Aufgabe 1, Stern-Gerlach Experiment

Wir betrachten eine Stern-Gerlach-Apparatur für Silberatome (siehe Abbildung) mit folgenden Daten: Ofentemperatur $T = 600 \text{ K}$, Länge des Magneten $L = 0,1 \text{ m}$, Abstand vom Magneten zum Detektor $l = 1 \text{ m}$, Feldgradient $\partial B_z / \partial z = 10^3 \text{ T m}^{-1}$. Berechnen Sie den Abstand $P_2 P_3$ auf dem Schirm.

Hinweise: Gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeit der Silberatome $(3k_B T / M)^{1/2}$ ist, wobei k_B die Boltzmannkonstante und M die Masse eines Silberatoms ist. Die Projektion des magnetischen Moments auf die Magnetfeldachse kann für Silber die Werte $\mu_z = \pm \mu_B$ annehmen, wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist.



Aufgabe 2, Wiederholung zur Drehimpulsalgebra

Es seien J_x, J_y und J_z drei Operatoren, die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen: $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, $[J_y, J_z] = i\hbar J_x$, $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$. Wir definieren $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ sowie die „Leiternoperatoren“ $J_+ = J_x + iJ_y$ und $J_- = J_x - iJ_y$.

a.) Zeigen Sie, dass \mathbf{J}^2 mit jeder der Komponenten von \mathbf{J} vertauscht, also $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0$. Wir können also eine Basis finden, in der zugleich \mathbf{J}^2 und z.B. J_z diagonal sind. Die zugehörigen Basisvektoren nennen wir $|j, m_j\rangle_z$. Es gilt (s. Vorlesung) $\mathbf{J}^2 |j, m_j\rangle_z = j(j+1)\hbar^2 |j, m_j\rangle_z$ mit $2j \in \mathbb{N}$ sowie $J_z |j, m_j\rangle_z = m_j \hbar |j, m_j\rangle_z$ mit $-j \leq m_j \leq j$. Zeigen Sie $[J_z, J_+] = \hbar J_+$, $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$, sowie $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

b.) Beweisen Sie, dass $J_+ |j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor von J_z zum Eigenwert $m_j + 1$ ist, sowie dass $J_- |j, m_j\rangle_z$ Eigenvektor zum Eigenwert $m_j - 1$ ist. Berechnen Sie weiter die Produkte $J_+ J_-$ und $J_- J_+$ und erhalten Sie daraus eine praktische Formel für \mathbf{J}^2 , die nur J_- , J_+ und J_z enthält.

Aufgabe 3, Erwartungswerte der Spin-Operatoren

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle s_x \rangle$, $\langle s_y \rangle$, $\langle s_z \rangle$ für einen Spin-1/2-Zustand $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Aufgabe 4, Projektionsoperatoren

Untersuchen Sie die Wirkung der Operatoren

$$\begin{aligned}\pi_+ &= 1/2 (\mathbf{I} + \sigma_z) \\ \pi_- &= -1/2 (\mathbf{I} - \sigma_z)\end{aligned}$$

mit dem Einheitsoperator \mathbf{I} und der Pauli-Matrix σ_z auf einen beliebigen Spinor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Was ergibt π_+^2 , π_-^2 , $\pi_+\pi_-$ und welches sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von π_+ und π_- ?

Aufgabe 5, Relativistische Korrektur der kinetischen Energie beim Wasserstoff-Problem

Bei der Berechnung der Eigenenergien des Wasserstoff-Atoms mit Hilfe der stationären Schrödinger-Gleichung wurde in der Vorlesung die nicht-relativistische kinetische Energie $E = p^2/(2m)$ angesetzt. Im allgemeinen ist die Energie jedoch gegeben durch

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}.\end{aligned}\quad (1)$$

Im Rahmen der zeitunabhängigen Störungstheorie kann nun mit Hilfe der Eigenfunktionen des ungestörten Systems $|n l m\rangle$, bestimmt durch den Hamilton-Operator H_0 , sowie den Stör-Hamilton-Operator H_1 die Korrektur der Eigenenergien aufgrund relativistischer Effekte berechnet werden.

a.) Leiten Sie ausgehend von Gleichung (1) den Stör-Hamilton-Operator

$$H_1 = -\frac{p^4}{8m^3 c^2}\quad (2)$$

her und zeigen Sie, dass H_1 auch geschrieben werden kann als

$$H_1 = -\frac{1}{2mc^2} \left(H_0 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2.\quad (3)$$

Der Operator H_0 ist gegeben durch

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.\quad (4)$$

b.) Berechnen Sie die relativistischen Energiekorrekturen

$$E_{nlm} = \langle n l m | H_1 | n l m \rangle.\quad (5)$$

Aufgabe 6, Störungstheorie

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, das in ein statisches homogenes elektrisches Feld \vec{E} eingebracht wird, das parallel zu Oz ausgerichtet ist. Zum in der Vorlesung behandelten Hamiltonoperator \hat{H}_0 muss dann der Stark-Hamiltonoperator \hat{H}_S addiert werden, der die Wechselwirkung des elektrischen Dipolmoments $e\vec{r}$ des Atoms mit dem Feld \vec{E} beschreibt. Es gilt

$$\hat{H}_S = -e\vec{E} \cdot \vec{r} = -eEz .$$

Da weder \hat{H}_0 noch \hat{H}_S auf die Spinvariablen wirken, vernachlässigen wir die Quantenzahl m_s .

Selbst für die stärksten im Labor realisierbaren elektrischen Felder gilt $\langle \hat{H}_S \rangle \ll \langle \hat{H}_0 \rangle$, sodass die durch \vec{E} hervorgerufene Energieverschiebung mittels Störungsrechnung bestimmt werden kann. Zeigen Sie, dass für den $1s$ -Zustand (d.h. $n = 1$, $l = 0$ und $m_l = 0$) die Energieverschiebung in erster Ordnung in E verschwindet, also mindestens quadratisch in E ist.