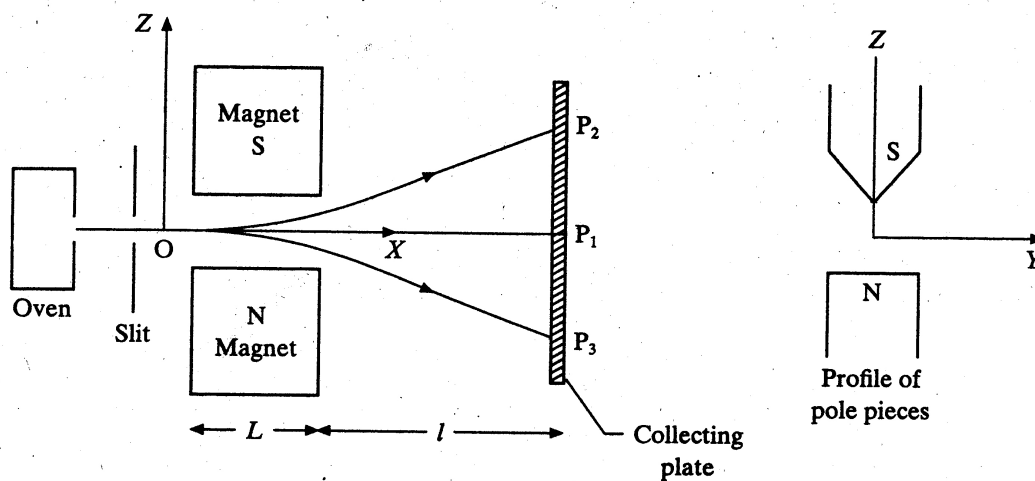


### Aufgabe 1, Stern-Gerlach Experiment

Wir betrachten eine Stern-Gerlach-Apparatur für Silberatome (siehe Abbildung) mit folgenden Daten: Ofentemperatur  $T = 600 \text{ K}$ , Länge des Magneten  $L = 0,1 \text{ m}$ , Abstand vom Magneten zum Detektor  $l = 1 \text{ m}$ , Feldgradient  $\partial B_z / \partial z = 10^3 \text{ T m}^{-1}$ . Berechnen Sie den Abstand  $P_2 P_3$  auf dem Schirm.

*Hinweise: Gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeit der Silberatome  $(3k_B T / M)^{1/2}$  ist, wobei  $k_B$  die Boltzmannkonstante und  $M$  die Masse eines Silberatoms ist. Die Projektion des magnetischen Moments auf die Magnetfeldachse kann für Silber die Werte  $\mu_z = \pm \mu_B$  annehmen, wobei  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton ist.*



### Aufgabe 2, Wiederholung zur Drehimpulsalgebra

Es seien  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  drei Operatoren, die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ ,  $[J_y, J_z] = i\hbar J_x$ ,  $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$ . Wir definieren  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  sowie die „Leiteroperatoren“  $J_+ = J_x + iJ_y$  und  $J_- = J_x - iJ_y$ .

a.) Zeigen Sie, dass  $\mathbf{J}^2$  mit jeder der Komponenten von  $\mathbf{J}$  vertauscht, also  $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0$ . Wir können also eine Basis finden, in der zugleich  $\mathbf{J}^2$  und z.B.  $J_z$  diagonal sind. Die zugehörigen Basisvektoren nennen wir  $|j, m_j\rangle_z$ . Es gilt (s. Vorlesung)  $\mathbf{J}^2 |j, m_j\rangle_z = j(j+1)\hbar^2 |j, m_j\rangle_z$  mit  $2j \in \mathbb{N}$  sowie  $J_z |j, m_j\rangle_z = m_j \hbar |j, m_j\rangle_z$  mit  $-j \leq m_j \leq j$ . Zeigen Sie  $[J_z, J_+] = \hbar J_+$ ,  $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$ , sowie  $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$ .

b.) Beweisen Sie, dass  $J_+ |j, m_j\rangle_z$  Eigenvektor von  $J_z$  zum Eigenwert  $m_j + 1$  ist, sowie dass  $J_- |j, m_j\rangle_z$  Eigenvektor zum Eigenwert  $m_j - 1$  ist. Berechnen Sie weiter die Produkte  $J_+ J_-$  und  $J_- J_+$  und erhalten Sie daraus eine praktische Formel für  $\mathbf{J}^2$ , die nur  $J_-$ ,  $J_+$  und  $J_z$  enthält.

### Aufgabe 3, Erwartungswerte der Spin-Operatoren

Berechnen Sie die Erwartungswerte  $\langle s_x \rangle$ ,  $\langle s_y \rangle$ ,  $\langle s_z \rangle$  für einen Spin-1/2-Zustand  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  mit  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

### Aufgabe 4, Projektionsoperatoren

Untersuchen Sie die Wirkung der Operatoren

$$\begin{aligned}\pi_+ &= 1/2 (\mathbf{I} + \sigma_z) \\ \pi_- &= -1/2 (\mathbf{I} - \sigma_z)\end{aligned}$$

mit dem Einheitsoperator  $\mathbf{I}$  und der Pauli-Matrix  $\sigma_z$  auf einen beliebigen Spinor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Was ergibt  $\pi_+^2$ ,  $\pi_-^2$ ,  $\pi_+\pi_-$  und welches sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\pi_+$  und  $\pi_-$ ?

### Aufgabe 5, Relativistische Korrektur der kinetischen Energie beim Wasserstoff-Problem

Bei der Berechnung der Eigenenergien des Wasserstoff-Atoms mit Hilfe der stationären Schrödinger-Gleichung wurde in der Vorlesung die nicht-relativistische kinetische Energie  $E = p^2/(2m)$  angesetzt. Im allgemeinen ist die Energie jedoch gegeben durch

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}.\end{aligned}\quad (1)$$

Im Rahmen der zeitunabhängigen Störungstheorie kann nun mit Hilfe der Eigenfunktionen des ungestörten Systems  $|n l m\rangle$ , bestimmt durch den Hamilton-Operator  $H_0$ , sowie den Stör-Hamilton-Operator  $H_1$  die Korrektur der Eigenenergien aufgrund relativistischer Effekte berechnet werden.

a.) Leiten Sie ausgehend von Gleichung (1) den Stör-Hamilton-Operator

$$H_1 = -\frac{p^4}{8m^3 c^2}\quad (2)$$

her und zeigen Sie, dass  $H_1$  auch geschrieben werden kann als

$$H_1 = -\frac{1}{2mc^2} \left( H_0 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2.\quad (3)$$

Der Operator  $H_0$  ist gegeben durch

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.\quad (4)$$

b.) Berechnen Sie die relativistischen Energiekorrekturen

$$E_{nlm} = \langle n l m | H_1 | n l m \rangle.\quad (5)$$

### Aufgabe 6, Störungstheorie

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, das in ein statisches homogenes elektrisches Feld  $\vec{E}$  eingebracht wird, das parallel zu  $Oz$  ausgerichtet ist. Zum in der Vorlesung behandelten Hamiltonoperator  $\hat{H}_0$  muss dann der Stark-Hamiltonoperator  $\hat{H}_S$  addiert werden, der die Wechselwirkung des elektrischen Dipolmoments  $e\vec{r}$  des Atoms mit dem Feld  $\vec{E}$  beschreibt. Es gilt

$$\hat{H}_S = -e\vec{E} \cdot \vec{r} = -eEz .$$

Da weder  $\hat{H}_0$  noch  $\hat{H}_S$  auf die Spinvariablen wirken, vernachlässigen wir die Quantenzahl  $m_s$ .

Selbst für die stärksten im Labor realisierbaren elektrischen Felder gilt  $\langle \hat{H}_S \rangle \ll \langle \hat{H}_0 \rangle$ , sodass die durch  $\vec{E}$  hervorgerufene Energieverschiebung mittels Störungsrechnung bestimmt werden kann. Zeigen Sie, dass für den  $1s$ -Zustand (d.h.  $n = 1$ ,  $l = 0$  und  $m_l = 0$ ) die Energieverschiebung in erster Ordnung in  $E$  verschwindet, also mindestens quadratisch in  $E$  ist.