Aufgabe 1, Kopplung von Bahndrehimpuls und Spin

In der Vorlesung wurde der Hamilton-Operator $\hat{H}_{ls}$ für die Spin-Bahn-Kopplung eingeführt:

$$\hat{H}_{ls} = \xi(r)\,\hat{l}\cdot\hat{s} \quad \text{mit} \quad \xi(r) = \frac{1}{2m_0^2c^2}\,\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^3}.$$

Die Basisfunktionen des ungestörten Wasserstoffatoms

$$\psi_{n,l,m_l,m_s=+1/2} = R_{n,l}Y_l^{m_l}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\psi_{n,l,m_l,m_s=-1/2} = R_{n,l}Y_l^{m_l}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

sind für diesen Hamilton-Operator nicht diagonal und sollen deshalb in Basisfunktionen $\bar{\psi}_{n,l,s,j,m_j}$ mit den neuen Quantenzahlen j, l, s, m_j transformiert werden, die sowohl für $\hat{H}_{ls}$ als auch den ungestörten Hamilton-Operator Eigenfunktionen sind:

$$|j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_s=\pm 1/2} \langle l, m_l, s, m_s | j, m_j\rangle\, |l, m_l, s, m_s\rangle \quad (\text{mit } m_j = m_l + m_s\ ).$$

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten $\langle l, m_l, s, m_s | j, m_j\rangle$ für die Kopplung eines Drehimpulses (l, m_l) mit dem Spin (s=1/2, $m_s = \pm 1/2$) zum Gesamtdrehimpuls (j, m_j) lauten:

j	$m_s = +1/2$	$m_s = -1/2$
$l + 1/2$	$\sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}}$
$l - 1/2$	$-\sqrt{\frac{l-m_j+1/2}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}$

a) Berechnen Sie die neuen Eigenfunktionen $\bar{\psi}_{n,l,s,j=l+1/2,m_j}$ und $\bar{\psi}_{n,l,s,j=l-1/2,m_j}$ und zeigen Sie, dass diese Eigenfunktionen zu den Operatoren $\hat{l}^2$, $\hat{s}^2$ und $\hat{j}_z$ sind.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Wechselwirkungsenergie Spin-Bahn-Kopplung:

$$\langle j, m_j, l, s | \xi(r)\hat{l}\cdot\hat{s} | j, m_j, l, s\rangle \tag{1}$$

Hinweis:
Der Erwartungswert für den Ausdruck $\langle \frac{1}{r^3}\rangle$ wurde in der Vorlesung angegeben und nutzen Sie die Relation $\hat{l}\cdot\hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$

Aufgabe 2, Hyperfeinaufspaltung des Wasserstoffatoms

Berechnen Sie die Hyperfeinstruktur-Energieaufspaltung für das Wasserstoffatom im Zustand n für $l = 0$

Aufgabe 3, Kernmagnetfeld
Aus der gemessenen Hyperfeinstruktur eines Wasserstoffatoms im 1s-Zustand von $\lambda = 21$ cm soll auf die Stärke des Magnetfelds am Kernort geschlossen werden, wenn die Hyperfeinstruktur durch die beiden Einstellungen des Kernspins entstanden ist.

Aufgabe 4, Volumeneffekt
Zur Beschreibung des Volumeneffekts bei Isotopieverschiebungen benötigen wir das Coulomb Potential des endlich ausgedehnten Kerns mit Radius R:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)2R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right), & r \leq R \\ -\frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r}, & r \leq R \end{cases}$$

Leiten Sie diese Formel unter der Annahme her, dass das Potential an der Stelle $r = R$ stetig ist.

Aufgabe 5, Atomare Besetzung
Wie groß ist im thermischen Gleichgewicht bei $T = 300$ K das Besetzungsverhältnis N_i/N_k, wenn auf dem Übergang $E_i \to E_k$ Licht der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm absorbiert wird und der Gesamtdrehimpuls $J_i = 1$ und $J_k = 0$ ist?

Aufgabe 6, Spontane und induzierte Emission
a) Berechnen Sie für beliebige Frequenz ν und Temperatur T das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit einer spontanen und einer induzierten Emission. Skizzieren Sie den Verlauf von spontaner und induzierter Emission als Funktion von $h\nu/(k_B T)$.

b) Berechnen Sie die Frequenz, bei der spontane und induzierte Emission gleich wahrscheinlich sind.