Aufgabe 1, Spontane Emission
Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer τ des 2p-Zustands des Wasserstoffatoms.

Aufgabe 2, Magnetische Dipolübergänge
a) Leiten Sie für das Wasserstoffatom die Auswahlregeln für magnetische Dipolstrahlung her (ohne Berücksichtigung des Elektronenspins).

b) Welche magnetischen Dipolübergänge gibt es beim spontanen Zerfall des Wasserstoffatoms aus den 3s-, 3p und 3d-Zuständen.

Aufgabe 3, Auswahlregeln
Abbildung 1 zeigt eine schematische Darstellung einiger Zustände des Cäsiumatoms

a) Geben Sie die Auswahlregeln für die Dipolübergänge eines Atoms ohne externe Magnetfelder an. Zwischen welchen Niveaus aus Abb. 1 können demnach Dipolübergänge stattfinden?

b) Nun betrachten wir die $6P_{1/2}$ und $6D_{3/2}$ Niveaus des Cäsiumatoms. Was ist der Effekt eines Magnetfelds auf diese Energieniveaus? Skizzieren Sie das Niveauschema dieser zwei Niveaus in einem schwachen Magnetfeld. Geben Sie die zusätzlichen Auswahlregeln in diesem Fall an. Welche Übergänge sind in diesem Fall mäglich? Wie viele Spektrallinien erwarten Sie für diesen Übergang, wenn Sie geometrische Effekte außer Acht lassen?

Hinweis: Cäsium ist ein Wasserstoffähnliches Atom mit einem Valenzelektron. In der Nomenklatur der Zustände $\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{X_j}$ *steht die erste Zahl für die Hauptquantenzahl* $\boldsymbol{n}$*.* $\boldsymbol{X}$ *gibt den Bahndrehimpuls* l *des Elektrons an (S:* $l = 0$*, P:* $l = 1$*, D:* $l = 2$*) und* $\boldsymbol{j}$ *ist der Gesamtdrehimpuls (*$j = l + s$*)*

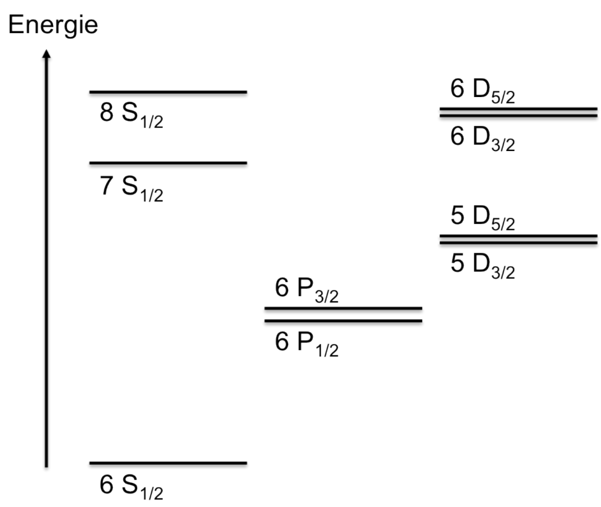

Abbildung 1: Niveauschema von Cäsium mit dem Grundzustand $6S_{1/2}$ und den ersten angeregten Zuständen.

Aufgabe 4, Oszillatorstärke
Die Wahrscheinlichkeit für den Dipol-Übergang eines Atoms vom Zustand a in den Zustand k ist proportional zur Oszillatorstärke f_{ka}. Diese ist gegeben durch

$$f_{ka} = \frac{2m\omega_{ka}}{3\hbar}|\mathbf{r}_{ka}|^2 \tag{1}$$

mit $|\mathbf{r}_{ka}|^2 = |\langle a|\,\mathbf{r}\,|k\rangle|^2$. In obiger Definition ist $\omega_{ka} = (E_k - E_a)/\hbar$ und $f_{ka} > 0$ ($f_{ka} < 0$) für Absorption (Emission). Zeigen Sie, dass für die Oszillatorstärken die folgende Beziehung gilt:

$$\sum_k f_{ka} = 1, \tag{2}$$

wobei f_{ka} die Oszillatorstärke des Absorptionsübergangs $a \to k$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Kommutator $[x, p_x] = i\hbar$ und die Identität $x_{ka} = -\frac{i}{m\omega_{ka}} p_{ka}$.

Aufgabe 5, Fermis Goldene Regel und Lichtelektrischer Effekt
Geben sei die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left[\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}'(t)\right]|\psi(t)\rangle \tag{3}$$

mit $\mathbf{H}'(t)$ als kleiner zeitabhängiger Störung. Die Lösungen für das ungestörte System ($\mathbf{H}'(t) = 0$) seien bekannt und gegeben durch

$$\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle = \exp(-i\omega_n t)\left|\psi^{(0)}\right\rangle \ , \tag{4}$$

$$\omega_n = \frac{E_n^{(0)}}{\hbar} \ . \tag{5}$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $c_{fi}(t)$ für den Übergang des Systems von einem Anfangszustand $\left|i^{(0)}\right\rangle$ in einen Endzustand $\left|f^{(0)}\right\rangle$ ist dann in erster Ordnung Störungstheorie gegeben durch

$$c_{fi}(t) \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \left\langle f^{(0)}\right|\mathbf{H}'(t)\left|i^{(0)}\right\rangle \exp(i\omega_{fi}t') \qquad (i \neq f) \ . \tag{6}$$

Liegt einer *periodische* Störung der Form

$$\mathbf{H}'(t) = \mathbf{H}'\exp(\pm i\omega t) \tag{7}$$

vor, so ist die Übergangsrate P_{fi}, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, für große Zeiten in 1. Ordnung gegeben durch

$$P_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle f^{(0)}\right|\mathbf{H}'\left|i^{(0)}\right\rangle\right|^2 \delta(E_{0,f} - E_{0,i} \pm \hbar\omega) \ . \tag{8}$$

Diese Gleichung ist als Fermis Goldene Regel bekannt und soll nun in einem Beispiel angewendet werden.

Ein Wasserstoffatom sei im Grundzustand, $|\psi_i(\mathbf{r})\rangle = |\psi_{n=1,l=0,m_l=0}(\mathbf{r})\rangle$. Nun wird es elektromagnetischer Strahlung ausgesetzt, die zur Ionisation des Wasserstoffatoms führt. Somit geht das zunächst gebundene Elektron in einen ungebundenen Zustand über, der als ebene Welle beschrieben werden kann. Diese ist gegeben durch

$$\left|\psi_f^{(0)}(\mathbf{r})\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{p}_f \mathbf{x}/\hbar) \ , \tag{9}$$

wobei die Aufenhaltswahrscheinlichkeit dieses Zustandes innerhalb des Volumens V auf Eins normiert ist. Das Elektron mit dem Impuls $\mathbf{p}_f$ hat nach dem Ionisationprozess die kinetische Energie

$$\frac{\mathbf{p}_f^2}{2m} = \hbar\omega + E_i^{(0)} = \hbar(\omega + \omega_i) \ . \tag{10}$$

Dabei ist zu beachten, dass $E_i^{(0)}$ und somit ω_i negativ sind, da dies die Energie bzw. Frequenz des gebundenen Zustandes sind. Die Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit dem Atom wird beschrieben durch die zeitabhängige Störung

$$\mathbf{H}'(t) = \mathbf{H}' \exp(-i\omega t) \tag{11}$$

$$\mathbf{H}' = -\frac{eA_0}{m} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})\mathbf{e}_A\mathbf{p} \tag{12}$$

mit der Amplitude der Welle A_0 und dem Polarisationsvektor $\mathbf{e}_A$. Rechnen Sie unter Verwendung von Fermis Goldener Regel die Übergangsrate P_{fi} in den finalen Zustand $\left|\psi_f^{(0)}(\mathbf{r})\right\rangle$ mit dem Impuls $\mathbf{p}_f$ unter Verwendung der Dipolnährung aus. Das Atom soll nicht-relativistisch beschrieben und der Spin vernachlässigt werden.

(nach Wachter, Hoeber, Repetitorium Theoretische Physik)