Übungen AKT 1, SoSe 2020
Dr. Stephanie Manz
Dr. Mario Pitschmann
Dr. Michael Scheucher
Blatt 1, Besprechung am 19. März 2020

Aufgabe 1
Werden α-Teilchen an einer dünnen Goldfolie gestreut, so wird über einen weiten Parameterbereich die Streuintensität in Abhängigkeit vom Ablenkwinkel beschrieben durch die Rutherfordsche Streuformel,

$$\frac{dn\,(\vartheta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 DN}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 v_0^4 \sin^4 \vartheta/2}\, d\Omega \ ,$$

wobei dn die Zahl der bezüglich der anfänglichen Bewegungsrichtung unter einem Winkel ϑ in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen ist, wenn n Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v_0 auf eine Streufolie eingeschossen werden. Letztere weißt die Dicke D mit N Folienatomen pro Einheitsvolumen auf, und die Folienatome haben die Kernladungszahl Z. Weiterhin bezeichnen e die Elementarladung und ε_0 die Vakuum-Dielektrizitätskonstante.

a.) Es werden von der Goldfolie 10^4 α-Teilchen pro Sekunde in eine gegebene Richtung unter einem gegebenen Raumwinkel gestreut. Wieviele α-Teilchen werden pro Sekunde in dieselbe Richtung und in denselben Raumwinkel gestreut, wenn Sie die Gold- durch eine Aluminiumfolie der gleichen Dicke ersetzen?

b.) α-Teilchen einheitlicher Energie treffen auf eine 1 μm dicke Goldfolie. Der Bruchteil $\eta = 1,35 \cdot 10^{-3}$ der auftreffenden α-Teilchen wird dabei um den Winkel $\vartheta = 60°$ in das Winkelintervall $d\vartheta$ gestreut. Welche Energie besitzen die einfallenden α-Teilchen?

c.) Die Rutherfordsche Streuformel lässt sich unter der Annahme reiner Coulomb-Streuung herleiten. Bei der Ablenkung sehr schneller α-Teilchen ($E_{kin} > 20$ MeV) um große Winkel ϑ, beobachtet man jedoch deutliche Abweichungen vom vorhergesagten Verhalten. Benutzen Sie diese Beobachtung um einen „Radius“ des betreffenden Atomkerns zu bestimmen.

Aufgabe 2
In einem zentralsymmetrischen Coulombpotential (ein negativ geladenes Teilchen mit einer Masse m_- gebunden an ein positiv geladenes Teilchen mit der Masse m_+) liefert die Schrödingergleichung eine unendliche Zahl von gebundenen Zuständen als Lösung. Die Energie solcher Zustände ist gegeben durch:

$$E_n = -\frac{m_r Z^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \ , \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

wobei $+Ze$ die Ladung des positive Teilchens, $m_r = m_+ m_- / (m_+ + m_-)$ die reduzierte Masse, und n die Hauptquantenzahl ist.

a.) Bestimmen Sie die Energiedifferenz $\Delta E_{1,2}$ (in eV) zwischen den zwei niedrigsten gebundenen Zuständen für folgende Systeme: Wasserstoff, Deuterium, Positronium (ein Elektron an ein Positron gebunden), hoch ionisiertes Uran ($^{238}_{92}U^{91+}$) und myonischer Wasserstoff (ein Myon an ein Proton gebunden) .

b.) Ist eines der oben genannten Systeme im ersten angeregten Zustand, so wird es spontan einen Übergang in den Grundzustand ($n = 1$) durchführen und dabei ein Photon aussenden. Die Frequenz ν dieses Photons ist durch die Einstein-Planck Relation $E = h\nu$ mit der Energie verknüpft. Bestimmen Sie die Wellenlänge der ausgesendeten Strahlung, wenn die oben gennanten Systeme einen Übergang $n = 2 \rightarrow n = 1$ durchführen. Zu welchem Teil des elektromagnetischen Spektrums gehören diese Wellenlängen?

Hinweis: Elektron-Ruhemasse $m_e c^2 = 511\ keV$, *Myon-Ruhemasse* $m_\mu c^2 = 106\ MeV$, *Proton-Ruhemasse* $m_p c^2 = 938\ MeV$, *Neutron-Ruhemasse* $m_n c^2 = 940\ MeV$, *Lichtgeschwindigkeit* $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$, *Planck-Konstante* $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\ Js$, *Elementarladung* $q = 1.60 \cdot 10^{-19}\ C$, *Dielektrizitätskonstante* $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$

Aufgabe 3
Ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung der Struktur der Elektronenhülle von Atomen ist die Spektroskopie. Zur Quantifizierung der auftretenden Spektren kann die Wellenlänge λ, die Frequenz ν, die Wellenzahl $\tilde{\nu}$ oder auch die Photonenenergie E der jeweiligen elektromagnetischen Strahlung angegeben werden. Diese Größen hängen über die Beziehung

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hc\tilde{\nu}$$

zusammen, wobei h die Planck-Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

a.) In der Spektroskopie werden auch Einheiten verwendet, welche nicht den SI-Einheiten entsprechen. Ordnen Sie folgende Einheiten den oben genannten physikalischen Größen zu und rechnen Sie sie in die jeweilige SI-Einheit um: eV (Elektronenvolt), cm^{-1} (Kayser), Å (Angström).

b.) Berechnen Sie folgende Größen: $\nu = 1$ THz $\Rightarrow \tilde{\nu} = ?$ cm^{-1}, $\lambda = 500$ nm $\Rightarrow E = ?$ eV, $\nu = 10^{18}$ Hz $\Rightarrow \lambda = ?$ Å.
Haben Sie eine Erklärung, warum in speziellen Gebieten der Spektroskopie diese Einheiten gegenüber den SI-Einheiten bevorzugt werden?

Aufgabe 4
Nach Rutherfords Atommodell bewegen sich Elektronen in Bahnen unter Einfluss des Coulombfeldes um den Kern. Wir wissen, dass beschleunigte Ladungen strahlen, egal ob es sich um freie oder um in einem Atom gebundene Teilchen handelt. Die Larmor-Gleichung gibt die abgestrahlte Leistung an:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{c^3},$$

wobei a die Beschleunigung, e die Elementarladung, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Typischerweise hat das Atom eine Größe von 0,1 nm. Bestimmen Sie die Zeit, die das Elektron braucht, um in das Zentrum des Kerns zu stürzen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5
Die Balmerserie des Wasserstoffspektrums soll mit einem Gitterspektrographen mit dem spektralen Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda = 5 \cdot 10^5$ gemessen werden. Bis zu welchem Zustand E_n können zwei benachbarte Linien noch aufgelöst werden?

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass auf einer Bohrschen Kreisbahn der Betrag der potentiellen Energie nicht gleich der kinetischen Energie ist. Wo steckt die Differenzenergie, wenn wir annehmen, dass das Atom zusammengesetzt wird aus Elektron und Kern, die ursprünglich ∞ weit voneinander entfernt und in Ruhe sind. Wie groß ist E$_{pot}$ im Vergleich zu E_{kin} auf den verschiedenen Bohrschen Bahnen?

Aufgabe 7
Das Bohrsche Atommodell beschreibt die Energierhaltung bei einem Strahlungsübergang der Frequenz ν_{21} zwischen zwei stationären Zuständen der Energie E_1 und E_2 durch die Beziehung $h\nu_{21} = E_2 - E_1$. Berücksichtigen Sie den Rückstoß des Atoms bei Emission eines Photons und berechnen Sie die resultierende Korrektur der Photonenfrequenz.

Aufgabe 8
Die klassische Hamilton-Funktion für ein wasserstoffähnliches Einelektronensystem lauten:

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\ .$$

a.) Transformieren Sie das Problem is Schwerpunkt- und Relativkoordinaten und zeigen Sie, dass die Lösungen der Schrödingergleichung für die Schwerpunktsbewegung durch ebene Wellen gegeben sind.
b.) Separieren Sie die Schrödingergleichung der Relativbewegung in Kugelkoordinaten.