

Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–37 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 20$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W , daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.

➤ Ergebnis: $W =$ (2P) ____

(b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

➤ Ergebnis: $E[k] =$ (1P) ____

➤ Ergebnis: $\sigma[k] =$ (1P) ____

(c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 8$ gleich 99% ist?

➤ Ergebnis: $p =$ (2P) ____

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 1.5 \text{ V}$, mit einem Fehler von 2 mV . Der Widerstand ist $R = 100 \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 1 \Omega$. Berechnen Sie den relativen Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

► **Ergebnis:** $\sigma[P]/P = \dots\dots\dots$ (4P) _____

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 15$ und Varianz $\sigma^2 = 1.8$. Bestimmen Sie die Standardabweichung

(a) des Stichprobenmittels

➤ Ergebnis: $\sigma[\bar{x}] = \dots\dots\dots$ (2P) ___

(b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

➤ Ergebnis: $\sigma[\tilde{x}] = \dots\dots\dots$ (2P) ___

4. Eine Stichprobe x_1, \dots, x_{50} stammt aus einer Gammaverteilung mit Formparameter $a = 5$ und unbekanntem Skalenparameter b . Die Summe aller Beobachtungen ist gleich 458.3.

(a) Schätzen Sie den Skalenparameter b mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➡ Ergebnis: $\hat{b} = \dots\dots\dots$ (2P) ____

(b) Geben sie eine Abschätzung des Standardfehlers von \hat{b} an.

➡ Ergebnis: $\sigma[\hat{b}] = \dots\dots\dots$ (2P) ____

5. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 122.7$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

► **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ (2P) ____

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[L_1, L_2]$ für den unbekanntem Wert λ . *Hinweis:* Berechnen Sie zuerst das Konfidenzintervall für τ .

► **Ergebnis:** $[L_1, L_2] =$ (2P) ____

6. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 19.62$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.71$.

(a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntem Mittelwert μ .

➤ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ (2P) ____

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2 .

➤ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ (2P) ____

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 20$.
Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➤ **Ergebnis:** $T =$ (1P) ____

Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ **Ergebnis:** ja/nein (1P) ____

7. In einem Laboratorium wird 30 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 195 Signale registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} =$ (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] =$ (1P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese, dass die mittlere Rate der Hintergrundstrahlung höchstens 6 Hz ist. Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T =$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $q =$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein (1P) ___

8. Bei einer Wahl vor zwei Jahren ergab sich für die Parteien A,B,C,D folgende Stimmenverteilung: A=33.4%, B=32.1%, C=18.5%, D=16%. Bei einer aktuellen Umfrage unter 500 Personen sieht die Parteipräferenz folgendermaßen aus: A=181, B=152, C=103, D=64. Überprüfen Sie mit dem χ^2 -Test die Nullhypothese, dass sich seit der Wahl das Wählerverhalten nicht geändert hat.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➡ Ergebnis: $T =$ (2P) ___

➡ Ergebnis: $q =$ (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➡ Ergebnis: ja/nein (1P) ___

Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–37 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 20$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W , daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.

➤ Ergebnis: $W = 0.987$ (2P) ____

(b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

➤ Ergebnis: $E[k] = 0.5$ (1P) ____

➤ Ergebnis: $\sigma[k] = 0.6982$ (1P) ____

(c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 8$ gleich 99% ist?

➤ Ergebnis: $p = 0.001256$ (2P) ____

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 1.5$ V, mit einem Fehler von 2 mV. Der Widerstand ist $R = 100 \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 1 \Omega$. Berechnen Sie den relativen Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➤ Ergebnis: $\sigma[P]/P = 0.0103$ (4P) ____

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 15$ und Varianz $\sigma^2 = 1.8$. Bestimmen Sie die Standardabweichung

(a) des Stichprobenmittels

➤ Ergebnis: $\sigma[\bar{x}] = 0.0849$ (2P) ____

(b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

➤ Ergebnis: $\sigma[\tilde{x}] = 0.1063$ (2P) ____

4. Eine Stichprobe x_1, \dots, x_{50} stammt aus einer Gammaverteilung mit Formparameter $a = 5$ und unbekanntem Skalenparameter b . Die Summe aller Beobachtungen ist gleich 458.3.

(a) Schätzen Sie den Skalenparameter b mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{b} = 1.8332$ (2P) ___

(b) Geben sie eine Abschätzung des Standardfehlers von \hat{b} an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{b}] = 0.1159$ (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 122.7$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} = 0.4075$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[L_1, L_2]$ für den unbekanntes Wert λ . *Hinweis:* Berechnen Sie zuerst das Konfidenzintervall für τ .

➤ Ergebnis: $[L_1, L_2] = [0.2744, 0.5712]$ (2P) ___

6. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 19.62$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.71$.

(a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntes Mittelwert μ .

➤ Ergebnis: $[M_1, M_2] = [19.329, 19.911]$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekanntes Varianz σ^2 .

➤ Ergebnis: $[V_1, V_2] = [1.2808, 2.3991]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 20$.
Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➤ Ergebnis: $T = -2.5991$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein **ja** (1P) ___

7. In einem Laboratorium wird 30 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 195 Signale registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} = 6.5$ (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] = 0.4655$ (1P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese, dass die mittlere Rate der Hintergrundstrahlung höchstens 6 Hz ist. Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T = 195$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $q = 202$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___

8. Bei einer Wahl vor zwei Jahren ergab sich für die Parteien A,B,C,D folgende Stimmenverteilung: A=33.4%, B=32.1%, C=18.5%, D=16%. Bei einer aktuellen Umfrage unter 500 Personen sieht die Parteipräferenz folgendermaßen aus: A=181, B=152, C=103, D=64. Überprüfen Sie mit dem χ^2 -Test die Nullhypothese, dass sich seit der Wahl das Wählerverhalten nicht geändert hat.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T = 6.0157$ (2P) ___

➤ Ergebnis: $q = 7.8147$ (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___