

Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–37 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 25$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W , daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.

➤ Ergebnis: $W =$ (2P) ____

(b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

➤ Ergebnis: $E[k] =$ (1P) ____

➤ Ergebnis: $\sigma[k] =$ (1P) ____

(c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 10$ gleich 99% ist?

➤ Ergebnis: $p =$ (2P) ____

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 1.2\text{ V}$, mit einem Fehler von 1 mV . Der Widerstand ist $R = 100\ \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.8\ \Omega$. Berechnen Sie den relativen Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

► **Ergebnis:** $\sigma[P]/P = \dots\dots\dots$ (4P) _____

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 15$ und Varianz $\sigma^2 = 1.8$. Bestimmen Sie die Standardabweichung

(a) des Stichprobenmittels

➤ Ergebnis: $\sigma[\bar{x}] = \dots\dots\dots$ (2P) ___

(b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

➤ Ergebnis: $\sigma[\tilde{x}] = \dots\dots\dots$ (2P) ___

4. Eine Stichprobe x_1, \dots, x_{50} stammt aus einer Gammaverteilung mit Formparameter $a = 5$ und unbekanntem Skalenparameter b . Die Summe aller Beobachtungen ist gleich 437.1.

(a) Schätzen Sie den Skalenparameter b mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➡ Ergebnis: $\hat{b} = \dots\dots\dots$ (2P) ____

(b) Geben sie eine Abschätzung des Standardfehlers von \hat{b} an.

➡ Ergebnis: $\sigma[\hat{b}] = \dots\dots\dots$ (2P) ____

5. Eine Messreihe der Länge $n = 40$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 109.3$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

► **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ (2P) ____

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[L_1, L_2]$ für den unbekanntes Wert λ . *Hinweis:* Berechnen Sie zuerst das Konfidenzintervall für τ .

► **Ergebnis:** $[L_1, L_2] =$ (2P) ____

6. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 24.73$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.65$.

(a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntem Mittelwert μ .

➤ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2 .

➤ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 25$.
Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➤ **Ergebnis:** $T =$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ **Ergebnis:** ja/nein (1P) ___

7. In einem Laboratorium wird 30 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 162 Signale registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} =$ (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] =$ (1P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese, dass die mittlere Rate der Hintergrundstrahlung höchstens 5 Hz ist. Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T =$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $q =$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein (1P) ___

8. Bei einer Wahl vor zwei Jahren ergab sich für die Parteien A,B,C,D folgende Stimmenverteilung: A=33.4%, B=32.1%, C=18.5%, D=16%. Bei einer aktuellen Umfrage unter 500 Personen sieht die Parteipräferenz folgendermaßen aus: A=164, B=162, C=90, D=84. Überprüfen Sie mit dem χ^2 -Test die Nullhypothese, dass sich seit der Wahl das Wählerverhalten nicht geändert hat.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➡ Ergebnis: $T =$ (2P) ____

➡ Ergebnis: $q =$ (1P) ____

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➡ Ergebnis: ja/nein (1P) ____

Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–37 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 25$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W , daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.

➤ Ergebnis: $W = 0.9762$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

➤ Ergebnis: $E[k] = 0.625$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $\sigma[k] = 0.7806$ (1P) ___

(c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 10$ gleich 99% ist?

➤ Ergebnis: $p = 0.001$ (2P) ___

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 1.2$ V, mit einem Fehler von 1 mV. Der Widerstand ist $R = 100 \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.8 \Omega$. Berechnen Sie den relativen Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➤ Ergebnis: $\sigma[P]/P = 0.0082$ (4P) ___

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 15$ und Varianz $\sigma^2 = 1.8$. Bestimmen Sie die Standardabweichung

(a) des Stichprobenmittels

➤ Ergebnis: $\sigma[\bar{x}] = 0.0775$ (2P) ___

(b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

➤ Ergebnis: $\sigma[\tilde{x}] = 0.0971$ (2P) ___

4. Eine Stichprobe x_1, \dots, x_{50} stammt aus einer Gammaverteilung mit Formparameter $a = 5$ und unbekanntem Skalenparameter b . Die Summe aller Beobachtungen ist gleich 437.1.

(a) Schätzen Sie den Skalenparameter b mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{b} = 1.7484$ (2P) ___

(b) Geben sie eine Abschätzung des Standardfehlers von \hat{b} an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{b}] = 0.1106$ (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 40$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 109.3$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➤ Ergebnis: $\hat{\tau} = 0.3660$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[L_1, L_2]$ für den unbekanntes Wert λ . *Hinweis:* Berechnen Sie zuerst das Konfidenzintervall für τ .

➤ Ergebnis: $[L_1, L_2] = [0.2341, 0.5321]$ (2P) ___

6. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 24.73$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.65$.

(a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntes Mittelwert μ .

➤ Ergebnis: $[M_1, M_2] = [24.4441, 25.0159]$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekanntes Varianz σ^2 .

➤ Ergebnis: $[V_1, V_2] = [1.2359, 2.3149]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 25$.

Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➤ Ergebnis: $T = -1.88$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein **ja** (1P) ___

7. In einem Laboratorium wird 30 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 162 Signale registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} = 5.4$ (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] = 0.4243$ (1P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese, dass die mittlere Rate der Hintergrundstrahlung höchstens 5 Hz ist. Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T = 162$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $q = 170$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___

8. Bei einer Wahl vor zwei Jahren ergab sich für die Parteien A,B,C,D folgende Stimmenverteilung: A=33.4%, B=32.1%, C=18.5%, D=16%. Bei einer aktuellen Umfrage unter 500 Personen sieht die Parteipräferenz folgendermaßen aus: A=164, B=162, C=90, D=84. Überprüfen Sie mit dem χ^2 -Test die Nullhypothese, dass sich seit der Wahl das Wählerverhalten nicht geändert hat.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T = 0.3355$ (2P) ___

➤ Ergebnis: $q = 7.8147$ (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___