Statistik 142.090/SS2013 **2. Prüfung** **23.9.2013**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–21 = 5 • 22–26 = 4 • 27–32 = 3 • 33–37 = 2 • 38–42 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Speicherchips zufällig $n = 15$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion durch $p = 0.015$ gegeben ist.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, daß Sie mindestens $k = 2$ fehlerhafte Chips ziehen.

   ➽ **Ergebnis:** $W =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

   ➽ **Ergebnis:** $E[k] =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[k] =$ .... (1P) ___

   (c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 15$ gleich 99% ist?

   ➽ **Ergebnis:** $p =$ .... (2P) ___

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 5\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.25\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ .... (4P) ___

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 400$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 75$ und Varianz $\sigma^2 = 3.5$. Bestimmen Sie

   (a) den Erwartungswert des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (1P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

   (c) den Erwartungswert des Stichprobenmedians

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ .... (1P) ___

   (d) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ .... (2P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe x fünfmal mit verschiedener Genauigkeit (Standardabweichung) σ und erhalten folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5
x_i	29.103	25.858	20.264	25.512	25.714
σ_i	2.03	1.71	2.37	1.88	2.12

Berechnen Sie unter Annahme von normalverteilten Messfehlern den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{x}$ von x.

➽ **Ergebnis:** $\hat{x} =$ .... (4P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einem Poissonprozess mit unbekannter mittlerer Rate λ. Die Summe aller Zählwerte ist gleich $T = 137$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ der mittleren Rate.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

(b) Geben Sie eine Abschätzung des Standardfehlers von $\hat{\lambda}$ an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (2P) ___

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ der mittleren Wartezeit τ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

(d) Geben Sie eine Abschätzung des Standardfehlers von $\hat{\tau}$ an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (2P) ___

-1.3553

6. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.83$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.36$.

   (a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Bei einer Umfrage antworten auf die Frage “Planen Sie ein Auslandssemester?” 167 von 300 TU-Studierenden mit ”Ja”.

   (a) Schätzen Sie den Anteil p derer, die ein Auslandssemester planen, an allen Studierenden mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{p} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ für p an (Bootstrapmethode).

   ➽ **Ergebnis:** $[p_1, p_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Hypothese, dass p mindestens 60% beträgt. Benützen Sie dabei die Näherung durch die Normalverteilung. Welchen Wert hat die Testgröße?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (2P) ___

   (d) Muss die Hypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

8. Beim Zerfall eines instabilen Teilchens haben die Zerfallskanäle K1 bis K4 die folgenden Wahrscheinlichkeiten (Verzweigungsverhältnisse): $0.4066, 0.0627, 0.1791, 0.3516$. Die Analyse von $n = 1000$ Zerfällen ergibt folgende Häufigkeiten für K1 bis K4: $402, 78, 180, 340$. Überprüfen Sie mit dem χ^2-Test, ob Ihre Analyse signifikant von den bekannten Verzweigungsverhältnissen abweicht.

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➻ **Ergebnis:** $T =$ .... (2P) ___

   ➻ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

   ➻ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–21 = 5 • 22–26 = 4 • 27–32 = 3 • 33–37 = 2 • 38–42 = 1

1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Speicherchips zufällig $n = 15$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion durch $p = 0.015$ gegeben ist.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, daß Sie mindestens $k = 2$ fehlerhafte Chips ziehen.

   ➽ **Ergebnis:** $W =$ 0.0208 (2P) ___

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

   ➽ **Ergebnis:** $E[k] =$ 0.2250 (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[k] =$ 0.4708 (1P) ___

   (c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 15$ gleich 99% ist?

   ➽ **Ergebnis:** $p =$ $6.6980E - 04$ (2P) ___

2. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 5\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.25\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ 2.24% (4P) ___

3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 400$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 75$ und Varianz $\sigma^2 = 3.5$. Bestimmen Sie

   (a) den Erwartungswert des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 75 (1P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0935 (2P) ___

   (c) den Erwartungswert des Stichprobenmedians

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 75 (1P) ___

(d) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 0.1172 (2P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe x fünfmal mit verschiedener Genauigkeit (Standardabweichung) σ und erhalten folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5
x_i	29.103	25.858	20.264	25.512	25.714
σ_i	2.03	1.71	2.37	1.88	2.12

Berechnen Sie unter Annahme von normalverteilten Messfehlern den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{x}$ von x.

➽ **Ergebnis:** $\hat{x} =$ 25.5911 (4P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einem Poissonprozess mit unbekannter mittlerer Rate λ. Die Summe aller Zählwerte ist gleich $T = 137$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ der mittleren Rate.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 1.37 (1P) ___

(b) Geben Sie eine Abschätzung des Standardfehlers von $\hat{\lambda}$ an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.1170 (2P) ___

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ der mittleren Wartezeit τ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 0.7299 (1P) ___

(d) Geben Sie eine Abschätzung des Standardfehlers von $\hat{\tau}$ an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.0624 (2P) ___

-1.3553

6. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.83$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.36$.

(a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[49.5821, 50.0779]$ (2P) ___

(b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ $[1.9040, 3.0030]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T =$ -1.3553 (1P) ___

Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Bei einer Umfrage antworten auf die Frage "Planen Sie ein Auslandssemester?" 167 von 300 TU-Studierenden mit "Ja".

   (a) Schätzen Sie den Anteil p derer, die ein Auslandssemester planen, an allen Studierenden mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{p} =$ 0.5567 (1P) ___

   (b) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ für p an (Bootstrapmethode).

   ➽ **Ergebnis:** $[p_1, p_2] =$ $[0.5005, 0.6129]$ (2P) ___

   (c) Testen Sie die Hypothese, dass p mindestens 60% beträgt. Benützen Sie dabei die Näherung durch die Normalverteilung. Welchen Wert hat die Testgröße?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ -1.5108 (2P) ___

   (d) Muss die Hypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

8. Beim Zerfall eines instabilen Teilchens haben die Zerfallskanäle K1 bis K4 die folgenden Wahrscheinlichkeiten (Verzweigungsverhältnisse): $0.4066, 0.0627, 0.1791, 0.3516$. Die Analyse von $n = 1000$ Zerfällen ergibt folgende Häufigkeiten für K1 bis K4: $402, 78, 180, 340$. Überprüfen Sie mit dem χ^2-Test, ob Ihre Analyse signifikant von den bekannten Verzweigungsverhältnissen abweicht.

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 4.1728 (2P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ 7.8147 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➠ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___