Beispielsammlung zur Vorlesung Statistik

142.090 VO

R. Frühwirth

Sommersemester 2014

1. Ein elektronischer Bauteil wird auf drei Maschinen produziert. Für die drei Maschinen gilt:

   Maschine A: 1200 Teile/Stunde, 4% fehlerhaft
   Maschine B: 1500 Teile/Stunde, 6% fehlerhaft
   Maschine C: 1800 Teile/Stunde, 3% fehlerhaft

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W_1, dass ein zufällig ausgewählter Bauteil einwandfrei ist.
   ➠ **Ergebnis:** W_1 =0.9573

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W_2, dass ein fehlerhafter Bauteil von Maschine C stammt.
   ➠ **Ergebnis:** W_2 =0.2812

2. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 20$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.
   ➠ **Ergebnis:** W =0.987

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.
   ➠ **Ergebnis:** $E[k]$ =0.5
   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[k]$ =0.6982

   (c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 8$ gleich 99% ist?
   ➠ **Ergebnis:** p =0.001256

3. In einer Lehrveranstaltung sitzen 24 Studenten und 31 Studentinnen. Die Vortragende wählt zufällig eine Gruppe von 8 Personen aus.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W_1, daß mehr als zwei Studenten ausgewählt werden?
   ➠ **Ergebnis:** W_1 =0.7748

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W_2, daß nur Studentinnen ausgewählt werden?
   ➠ **Ergebnis:** W_2 =0.0065

4. Sie messen an einem laufenden Gleichstrommotor eine Spannung von $U = 120\,\mathrm{V}$ und eine Stromstärke von $I = 3.5\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Fehler von 1% bzw. 2%. Berechnen Sie mit Fehlerfortpflanzung den relativen Fehler der Leistung $P = U \cdot I$.
   ➠ **Ergebnis:** $\sigma(P)/P$ =0.0224

5. Sie messen an einem Widerstand eine Spannung von $U = 12\,\mathrm{V}$ und eine Stromstärke von $I = 100\,\mathrm{mA}$, mit einem Fehler von $10\,\mathrm{mV}$ bzw. $2\,\mathrm{mA}$. Berechnen Sie mit Fehlerfortpflanzung den Fehler des Widerstandwerts $R = U/I$ (in Ω).
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma(R)$ =2.4021

6. Zwei Widerstände mit Nennwert $R_1 = 100\,\Omega$ und $R_2 = 500\,\Omega$ sind parallelgeschaltet. Der tatsächlich Wert weicht mit einer relativen Standardabweichung von $\sigma_1 = 1.5\%$ bzw. $\sigma_2 = 1\%$ vom Nennwert ab. Berechnen Sie die relative Standardabweichung des Gesamtwiderstandwerts $R = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$.
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma(R)/R$ =0.0126

7. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 1.5\,\mathrm{V}$, mit einem Fehler von $2\,\mathrm{mV}$. Der Widerstandswert ist $R = 100\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 1\,\Omega$. Berechnen Sie den relativen Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[P]/P$ =0.0103

8. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus einer Normalverteilung mit Mittel $\mu = 15$ und Varianz $\sigma^2 = 1.8$. Bestimmen Sie die Standardabweichung
   (a) des Stichprobenmittels
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}]$ =0.0849
   (b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}]$ =0.1063

9. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 500$ stammt aus einer t-Verteilung mit $k = 4$ Freiheitsgraden. Bestimmen Sie die Standardabweichung
   (a) des Stichprobenmittels
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}]$ =0.0632
   (b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}]$ =0.0594

10. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 500$ stammt aus einer Gammaverteilung mit $a = 3, b = 2$. Bestimmen Sie die Standardabweichung
   (a) des Stichprobenmittels
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}]$ =0.1549
   (b) des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert)
   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}]$ =0.1814

11. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_{50}$ stammt aus einer Gammaverteilung mit Formparameter $a = 5$ und unbekanntem Skalenparameter b. Die Summe aller Beobachtungen ist gleich 458.3.

    (a) Schätzen Sie den Skalenparameter b mit der Maximum-Likelihood-Methode.
    ➽ **Ergebnis:** $\hat{b}$ =1.8332

    (b) Geben sie eine Abschätzung des Standardfehlers von $\hat{b}$ an.
    ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{b}]$ =0.1159

12. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 122.7$.

    (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.
    ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda}$ =0.4075

    (b) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[L_1, L_2]$ für den unbekannten Wert λ. *Hinweis*: Berechnen Sie zuerst das Konfidenzintervall für τ.
    ➽ **Ergebnis:** $[L_1, L_2]$ =$[0.2744, 0.5712]$

13. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 19.62$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.71$.

    (a) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.
    ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2]$ =$[19.329, 19.911]$

    (b) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.
    ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2]$ =$[1.2808, 2.3991]$

    (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 20$.
    Welchen Wert hat die Testgröße T?
    ➽ **Ergebnis:** T =-2.5991
    Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?
    ➽ **Ergebnis:** ja

14. Eine Stichprobe der Größe $n = 50$ stammt aus einer Normalverteilung mit $\sigma = 2.4$ mit unbekanntem Mittelwert μ. Die Nullhypothese ist $H_0 : \mu = 10$. Wie groß ist die Güte des einseitigen Tests mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ für die Gegenhypothese $H_1 : \mu = 11$?
    ➽ **Ergebnis:** $1 - \beta(11)$ =0.7323

15. Eine Stichprobe der Größe $n = 75$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Nullhypothese ist $H_0 : \tau = 7$. Wie groß ist die Güte des einseitigen Tests mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ für die Gegenhypothese $H_1 : \tau = 8$?

➠ **Ergebnis:** $1-\beta(8)$ =0.3286

16. Testen Sie anhand einer Beobachtung x die Nullhypothese $H_0 : f(x) = 2-2x\ 0 \leq x \leq 1$ gegen die Gegenhypothese $H_1 : f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich C so, dass der Test die maximal Güte hat. Wie groß ist die maximale Güte für $\alpha = 0.01$?
➠ **Ergebnis:** C =$[0.9, 1]$
➠ **Ergebnis:** $1-\beta$ =0.19

17. In einem Laboratorium wird 30 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 195 Signale registriert.

    (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.
    ➠ **Ergebnis:** $\hat{\lambda}$ =6.5

    (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.
    ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}]$ =0.4655

    (c) Testen Sie die Nullhypothese, dass die mittlere Rate der Hintergrundstrahlung höchstens 6 Hz ist. Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).
    ➠ **Ergebnis:** T =195
    ➠ **Ergebnis:** q =202

    (d) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?
    ➠ **Ergebnis:** nein

18. Bei einer Umfrage antworten auf die Frage “Kennen Sie die Binomialverteilung?” 118 von 300 TU-Student/innen mit ”Ja”.

    (a) Schätzen Sie den Bekanntheitsgrad p mit der Maximum-Likelihood-Methode.
    ➠ **Ergebnis:** $\hat{p}$ =0.3933

    (b) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ für p an (Bootstrapmethode).
    ➠ **Ergebnis:** $[p_1, p_2]$ =$[0.3381, 0.4486]$

    (c) Testen Sie die Hypothese, dass der Bekannheitsgrad mindestens 40% beträgt. Benützen Sie dabei die Näherung durch die Normalverteilung. Welchen Wert hat die Testgröße?
    ➠ **Ergebnis:** T =-1.9729

    (d) Muss die Hypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?
    ➠ **Ergebnis:** ja

19. In einer Stichprobe von $n = 1000$ K^+-Mesonen sind $m = 647$ Zerfälle mit einem Myon im Endzustand.

(a) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[K_1, K_2]$ für das Verzeigungsverhältnis dises Zerfallskanals an (Bootstrapmethode).

➽ **Ergebnis:** $[K_1, K_2]$ =[0.6174, 0.6766]

(b) Testen Sie die Hypothese, dass das Verzweigungsverhältnis höchstens 63.5% beträgt.

i. Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** T =0.7882

ii. Kann die Hypothese bei einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** nein

20. In einer zufälligen Stichprobe von $n = 3000$ K^+-Mesonen sind $m = 151$ Zerfälle mit einem Elektron im Endzustand.

(a) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[K_1, K_2]$ für das Verzeigungsverhältnis dieses Zerfallskanals an (Bootstrapmethode).

➽ **Ergebnis:** $[K_1, K_2]$ =[0.0425, 0.0582]

(b) Testen Sie die Hypothese, dass das Verzweigungsverhältnis höchstens 4.9% beträgt.

i. Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** T =0.3383

ii. Kann die Hypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/neinnein

21. Bei einer Wahl vor zwei Jahren ergab sich für die Parteien A,B,C,D folgende Stimmenverteilung: A=33.4%, B=32.1%, C=18.5%, D=16%. Bei einer aktuellen Umfrage unter 500 Personen sieht die Parteipräferenz folgendermaßen aus: A=181, B=152, C=103, D=64. Überprüfen Sie mit dem χ^2-Test die Nullhypothese, dass sich seit der Wahl das Wählerverhalten nicht geändert hat.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** T =6.0157

➽ **Ergebnis:** q =7.8147

(b) Muss die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** nein

22. Sie messen eine unbekannte Größe x fünfmal mit verschiedener Genauigkeit (Standardabweichung) σ und erhalten folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5
x_i	18.657	22.052	15.532	23.937	23.683
σ_i	2.10	1.71	2.40	1.59	2.24

Berechnen Sie unter Annahme von normalverteilten Messfehlern den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{x}$ von x.

➽ **Ergebnis:** $\hat{x}$ =21.4305