

Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–38 = 1

!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Spannungsabfall von $U = 1.5 \text{ V}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist 2 mV . Der Widerstandswert ist $R = 100 \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.6 \Omega$. Berechnen Sie den **relativen** Standardfehler der Wärmeleistung $P = U^2/R$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

► **Ergebnis:** $\sigma[P]/P = 0.0065$ (4P) ____

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Laplace-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie:

- (a) die Varianz der Verteilung mittels Integration.

► **Ergebnis:** $\text{var}[x] = 2$ (2P) ____

- (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels \bar{x} . *Hinweis:* Bestimmen Sie

► **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] = 0.1$ (2P) ____

- (c) die Standardabweichung des Stichprobenmedians \tilde{x} (asymptotischer Wert).

► **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] = 0.0707$ (2P) ____

3. Eine Messreihe der Länge $n = 80$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 210.5$.

- (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ .

► **Ergebnis:** $\hat{\tau} = 2.6313$ (1P) ____

- (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

► **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] = 0.2942$ (1P) ____

- (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekanntem Wert τ .

► **Ergebnis:** $[c_1, c_2] = [2.0064, 3.5775]$ (2P) ____

4. Eine Stichprobe x_1, \dots, x_n stammt aus einer Rayleighverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x}{v} \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right), \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie:

(a) den Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{v} von v

➤ **Ergebnis:** $\hat{v} = \frac{\sum x_i^2}{2n}$ (3P) ___

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich v . *Hinweis:* Wenn X Rayleigh-verteilt ist, ist die Erwartung von X^2 gleich $2v$.

➤ **Ergebnis:** $I_v = \frac{n}{v^2}$ (2P) ___

(c) den Erwartungswert von \hat{v} .

➤ **Ergebnis:** $\text{Erw}[\hat{v}] = v$ (1P) ___

(d) die Standardabweichung von \hat{v} . *Hinweis:* Der ML-Schätzer ist effizient.

➤ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{v}] = \frac{v}{\sqrt{n}}$ (1P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 61.13$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.16$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntem Mittelwert μ .

➤ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] = [60.916, 61.344]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekanntem Varianz σ^2 .

➤ **Ergebnis:** $V_1 = 1.4905$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 60$.

Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➤ **Ergebnis:** $T = 10.4918$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.01$?

➤ **Ergebnis:** ja/nein **ja** (1P) ___

6. In einem Labor wird 120 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 282 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➤ Ergebnis: $\hat{\lambda} = 2.35$ (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] = 0.140$ (1P) ___

(c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 2 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➤ Ergebnis: $T = 282$ (1P) ___

➤ Ergebnis: $q = 277$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein **ja** (1P) ___

7. Die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle stammen aus einem Experiment zur Messung der Myonlebensdauer. Testen Sie mit dem χ^2 -Test, ob die Daten in der Tabelle signifikant von der Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 2.197$ abweichen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x \leq 0.5$	121
$0.5 \leq x \leq 1$	76
$1 \leq x \leq 1.5$	59
$1.5 \leq x \leq 2.5$	80
$2.5 \leq x \leq 4$	85
$4 \leq x$	79

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➤ Ergebnis: $T = 6.543$ (4P) ___

➤ Ergebnis: $q = 11.07$ (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➤ Ergebnis: ja/nein **nein** (1P) ___