
Zuname: Vorname:

Matrikel-/Kennnummer: / Punkte: Note:

Notenschlüssel: 0–19 = 5 • 20–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 5 \text{ A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist 2 mA . Der Widerstandswert ist $R = 200 \Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2 \Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = RI^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➤ Ergebnis: $\sigma[P] = 6.4031$ (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + 4x + 4}{18}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie:

- (a) den Erwartungswert des Stichprobenmittels \bar{x} .

➤ Ergebnis: $E[\bar{x}] = -2$ (1P) ___

- (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels \bar{x} .

➤ Ergebnis: $\sigma[\bar{x}] = 0.1732$ (2P) ___

- (c) den Erwartungswert des Stichprobenmedians \tilde{x} .

➤ Ergebnis: $E[\tilde{x}] = -2$ (1P) ___

- (d) die Standardabweichung des Stichprobenmedians \tilde{x} (asymptotischer Wert).

➤ Ergebnis: $\sigma[\tilde{x}] = 0.2171$ (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ . Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 243.6$.

- (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ .

➤ Ergebnis: $\hat{\tau} = 1.9488$ (1P) ___

- (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

➤ Ergebnis: $\sigma[\hat{\tau}] = 0.1743$ (1P) ___

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➤ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} = 0.5131$ (1P) ___

(d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➤ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] = 0.0459$ (1P) ___

(e) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekanntem Wert τ .

➤ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] = [1.6477, 2.3412]$ (2P) ___

4. Eine unabhängige Stichprobe x_1, \dots, x_n stammt aus einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\sqrt{2} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right)}{\sqrt{\pi} v^{3/2}}, \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie anhand der Stichprobe:

(a) den Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{v} von v .

➤ **Ergebnis:** $\hat{v} = \frac{\sum x_i^2}{3n}$ (3P) ___

(b) den Erwartungswert von \hat{v} . *Hinweis:* Wenn X Maxwell-Boltzmann-verteilt ist, ist die Erwartung von X^2 gleich $3v$.

➤ **Ergebnis:** $E[\hat{v}] = v$ (1P) ___

(c) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich v . *Hinweis:* siehe (b)

➤ **Ergebnis:** $I_v = \frac{3n}{2v^2}$ (2P) ___

(d) die Varianz von \hat{v} . *Hinweis:* Der ML-Schätzer ist effizient.

➤ **Ergebnis:** $\text{var}[\hat{v}] = \frac{2v^2}{3n}$ (1P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekanntem Mittelwert μ .

➤ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] = [39.5043, 40.0557]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekanntem Varianz σ^2 .

➤ **Ergebnis:** $V_1 = 3.5725$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$.

Welchen Wert hat die Testgröße T ?

➡ Ergebnis: $T = -1.5768$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➡ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___

6. In einem Labor wird 100 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 221 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➡ Ergebnis: $\hat{\lambda} = 2.21$ (1P) ___

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➡ Ergebnis: $\sigma[\hat{\lambda}] = 0.1487$ (1P) ___

(c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 2 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➡ Ergebnis: $T = 221$ (1P) ___

➡ Ergebnis: $q = 234$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➡ Ergebnis: ja/nein nein (1P) ___

7. Die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle stammen aus einem Experiment zur Messung der Myonlebensdauer. Testen Sie mit dem χ^2 -Test, ob die Daten in der Tabelle signifikant von der Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 2.197$ abweichen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x \leq 0.5$	194
$0.5 \leq x \leq 1$	117
$1 \leq x \leq 1.5$	111
$1.5 \leq x \leq 2.5$	165
$2.5 \leq x \leq 4$	163
$4 \leq x$	139

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q , mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➡ Ergebnis: $T = 9.7860$ (4P) ___

➡ Ergebnis: $q = 11.0705$

(1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➡ Ergebnis: ja/nein **nein**

(1P) ___