Statistik 142.090/SS2014 **2. Prüfung** **8.9.2014**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

---

1. In einem Experiment wird der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ eines Teilchens gemessen mit $p_T = 4.57\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_T] = 0.065\,\mathrm{GeV}/c$. Unabhängig davon wird der Longitudinalimpuls p_z gemessen mit $p_z = 6.86\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_z] = 0.114\,\mathrm{GeV}/c$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[\vartheta]$ des Polarwinkels $\vartheta = \arctan(p_T/p_z)$ mit linearer Fehlerfortpflanzung.

   Anmerkung: GeV/c ist eine in der Teilchenphysik übliche Einheit des Impulses.
   Hinweis: Die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ ist $f'(x) = 1/(1 + x^2)$.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\vartheta] =$ .... (4P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Exponentialverteilung Ex(12.5). Bestimmen Sie

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ .... (2P) ___

   (c) Die Größe $\tilde{x}' = \tilde{x}/\ln 2$ ist ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer von τ. Berechnen Sie seine Standardabweichung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}'] =$ .... (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 8.63$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Geben Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ an.

   ➽ **Ergebnis:** $c_1 =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $c_2 =$ .... (1P) ___

4. Ein Alternativversuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p wird solange wiederholt, bis r Erfolge eingetreten sind. Die Anzahl der dazu notwendigen Versuche wird mit K bezeichnet. Die Verteilung von K ist eine negative Binomialverteilung mit der Dichte

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \geq r, r \in \mathbb{N}$$

r ist eine gegebene positive ganze Zahl, p ist unbekannt. Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p anhand einer unabhängigen Stichprobe $k_1, \ldots, k_n$ von K.

➽ **Ergebnis:** $\hat{p} =$ .... (4P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 30.55$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.17$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➠ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➠ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 30$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➠ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➠ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 30 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 153 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ . . . . (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ . . . . (1P) ___

   (c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate höchstens 5 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ . . . . (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ . . . . (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein . . . . (1P) ___

7. 500 Würfe mit einem Würfel ergeben die folgenden Häufigkeiten:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	71	77	102	86	85	79

Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob der Würfel symmetrisch ist.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

8. Eine Münze wird $n = 10$ mal unabhängig geworfen. Die Wahrscheinlichkeit von „Zahl“ sei gleich p, die beobachtete Anzahl von „Zahl“ sei gleich k. Sie wollen die Nullhypothese $H_0 : p = 0.5$ testen und verwerfen sie, wenn $k = 0, 1, 9, 10$.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit α eines Fehlers 1. Art?

   ➽ **Ergebnis:** $\alpha =$ .... (2P) ___

   (b) Geben Sie die Gütefunktion des Tests an.

   ➽ **Ergebnis:** $1 - \beta(p) =$ .... (2P) ___

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\beta(0.1)$ eines Fehlers 2. Art, wenn $p = 0.1$?

   ➽ **Ergebnis:** $\beta(0.1) =$ .... (1P) ___

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

1. In einem Experiment wird der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ eines Teilchens gemessen mit $p_T = 4.57\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_T] = 0.065\,\mathrm{GeV}/c$. Unabhängig davon wird der Longitudinalimpuls p_z gemessen mit $p_z = 6.86\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_z] = 0.114\,\mathrm{GeV}/c$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[\vartheta]$ des Polarwinkels $\vartheta = \arctan(p_T/p_z)$ mit linearer Fehlerfortpflanzung.

   Anmerkung: GeV/c ist eine in der Teilchenphysik übliche Einheit des Impulses.
   Hinweis: Die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ ist $f'(x) = 1/(1 + x^2)$.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\vartheta] =$ 0.0101 (4P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Exponentialverteilung Ex(12.5). Bestimmen Sie

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.8839 (2P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 0.8839 (2P) ___

   (c) Die Größe $\tilde{x}' = \tilde{x}/\ln 2$ ist ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer von τ. Berechnen Sie seine Standardabweichung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}'] =$ 1.2752 (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 8.63$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 0.1726 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.0244 (1P) ___

   (c) Geben Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ an.

   ➽ **Ergebnis:** $c_1 =$ 0.1231 (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $c_2 =$ 0.2564 (1P) ___

4. Ein Alternativversuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p wird solange wiederholt, bis r Erfolge eingetreten sind. Die Anzahl der dazu notwendigen Versuche wird mit K bezeichnet. Die Verteilung von K ist eine negative Binomialverteilung mit der Dichte

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \geq r, r \in \mathbb{N}$$

r ist eine gegebene positive ganze Zahl, p ist unbekannt. Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p anhand einer unabhängigen Stichprobe $k_1, \ldots, k_n$ von K.

➽ **Ergebnis:** $\hat{p} = \dfrac{nr}{\sum k_i}$ (4P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 50$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 30.55$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.17$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[30.1314, 30.9686]$ (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ $[1.5142, 3.3697]$ (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 30$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 2.6401 (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 30 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 153 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 5.1 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.4123 (1P) ___

(c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate höchstens 5 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 153 (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 170 (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. 500 Würfe mit einem Würfel ergeben die folgenden Häufigkeiten:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	71	77	102	86	85	79

Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob der Würfel symmetrisch ist.

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 6.8320 (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 11.0705 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

8. Eine Münze wird $n = 10$ mal unabhängig geworfen. Die Wahrscheinlichkeit von „Zahl“ sei gleich p, die beobachtete Anzahl von „Zahl“ sei gleich k. Sie wollen die Nullhypothese $H_0 : p = 0.5$ testen und verwerfen sie, wenn $k = 0, 1, 9, 10$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit α eines Fehlers 1. Art?

➽ **Ergebnis:** $\alpha =$ 0.0215 (2P) ___

(b) Geben Sie die Gütefunktion des Tests an.

➽ **Ergebnis:** $1 - \beta(p) =$ $p^n + np^{n-1}(1-p) + np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n$ (2P) ___

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\beta(0.1)$ eines Fehlers 2. Art, wenn $p = 0.1$?

➽ **Ergebnis:** $\beta(0.1) =$ 0.2639 (1P) ___