Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–19 = 5 • 20–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 12\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.5\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ .... (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Gammaverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x/2}}{k}, \quad x \geq 0$$

Berechnen Sie:

(a) die Konstante k.

➽ **Ergebnis:** $k =$ .... (1P) ___

(b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

(c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 198.7$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (2P) ___

   (e) Bestimmen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➽ **Ergebnis:** $c =$ .... (2P) ___

   (f) Bestimmen Sie daraus das rechtsseitige 95%-Konfidenzintervall $[d, \infty)$ für den unbekannten Wert $\lambda = 1/\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $d =$ .... (1P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe μ fünfmal mit verschiedener Genauigkeit (Standardabweichung) σ_i und erhalten folgende Messwerte x_i:

i	1	2	3	4	5
x_i	29.11	25.86	21.27	25.51	24.73
σ_i	2.03	1.81	2.27	1.84	2.15

Berechnen Sie unter Annahme von normalverteilten Messfehlern:

(a) den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}$ von μ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\mu} =$ .... (2P) ___

(b) die Fisherinformation I_μ der Messreihe.

➽ **Ergebnis:** $I_\mu =$ .... (2P) ___

(c) die Standardabweichung von $\hat{\mu}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\mu}] =$ .... (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 175$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 51.08$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.74$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. In einem Labor wird 90 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 276 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (c) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 3 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➠ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   ➠ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➠ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die gruppierten Daten in der Tabelle signifikant von der Standardnormalverteilung abweichen.
Hinweis: Verwenden Sie die Tabellen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, um die Gruppenwahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Gruppe	Anzahl
$x \leq -0.9$	44
$-0.9 \leq x \leq -0.3$	38
$-0.3 \leq x \leq 0.3$	41
$0.3 \leq x \leq 0.9$	44
$0.9 \leq x$	33

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Statistik 142.090/SS2015 **Lösung** **1.10.2015**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–19 = 5 • 20–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 12\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.5\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ 2.24% (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Gammaverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x/2}}{k}, \quad x \geq 0$$

   Berechnen Sie:

   (a) die Konstante k.

   ➽ **Ergebnis:** $k =$ 16 (1P) ___

   (b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ 6 (2P) ___

   (c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.2449 (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 198.7$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.3247 (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.1082 (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 0.7549 (1P) ___

(d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.0616 (2P) ___

(e) Bestimmen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Ergebnis:** $c =$ 1.5233 (2P) ___

(f) Bestimmen Sie daraus das rechtsseitige 95%-Konfidenzintervall $[d, \infty)$ für den unbekannten Wert $\lambda = 1/\tau$.

➽ **Ergebnis:** $d =$ 0.6565 (1P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe μ fünfmal mit verschiedener Genauigkeit (Standardabweichung) σ_i und erhalten folgende Messwerte x_i:

i	1	2	3	4	5
x_i	29.11	25.86	21.27	25.51	24.73
σ_i	2.03	1.81	2.27	1.84	2.15

Berechnen Sie unter Annahme von normalverteilten Messfehlern:

(a) den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}$ von μ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\mu} =$ 25.5011 (2P) ___

(b) die Fisherinformation I_μ der Messreihe.

➽ **Ergebnis:** $I_\mu =$ 1.2537 (2P) ___

(c) die Standardabweichung von $\hat{\mu}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\mu}] =$ 0.8931 (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 175$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 51.08$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.74$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[50.8832, 51.2768]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ $[1.4253, 2.1724]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 50$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T =$ 1.6537 (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

6. In einem Labor wird 90 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 276 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 3.0667 (1P) ___

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.1846 (1P) ___

(c) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 3 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 0.3651 (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 1.645 (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die gruppierten Daten in der Tabelle signifikant von der Standardnormalverteilung abweichen.
Hinweis: Verwenden Sie die Tabellen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, um die Gruppenwahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Gruppe	Anzahl
$x \leq -0.9$	44
$-0.9 \leq x \leq -0.3$	38
$-0.3 \leq x \leq 0.3$	41
$0.3 \leq x \leq 0.9$	44
$0.9 \leq x$	33

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 3.1567 (4P) ___

➠ **Ergebnis:** $q =$ 9.4877 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➠ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___