Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–17 = 5 • 18–21 = 4 • 22–26 = 3 • 27–30 = 2 • 31–34 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 12\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2\,\mathrm{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 500\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2\,\Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = R\,I^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[P] =$ .... (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte
$$f(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{x^2 - 6x + 9}{15}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$
Berechnen Sie:

(a) Die Normierungskonstante C

➠ **Ergebnis:** $C =$ .... (1P) ___

(b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➠ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ .... (1P) ___

(c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➠ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (1P) ___

(d) den Erwartungswert des Stichprobenmedians $\tilde{x}$.

➠ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\tilde{x}] =$ .... (1P) ___

(e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

➠ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ .... (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 187.3$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (e) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➠ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ .... (2P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe μ viermal mit verschiedener Genauigkeit σ_i und erhalten folgende Messwerte $x_i = \mu + \varepsilon_i$:

i	1	2	3	4
x_i	29.11	25.86	21.27	25.51
σ_i	1.92	1.73	2.04	1.84

Nehmen Sie an, dass die Messfehler ε_i normalverteilt mit Mittel 0 und Standardabweichung σ_i sind. Berechnen Sie:

(a) den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}$ von μ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\mu} =$ .... (2P) ___

(b) die Fisherinformation I_μ der Messreihe.

➽ **Ergebnis:** $I_\mu =$ .... (2P) ___

(c) die Standardabweichung von $\hat{\mu}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\mu}] =$ .... (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➠ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➠ **Ergebnis:** $V_1 =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➠ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➠ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Paretoverteilung mit der folgenden Dichte stammen:

$$f(x) = \begin{cases} 24\,x^{-4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

Gruppe	Anzahl
$2 \leq x \leq 2.5$	50
$2.5 \leq x \leq 3$	27
$3 \leq x \leq 4$	23
$4 \leq x$	20

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Statistik 142.090/SS2015 **Lösung** **29.2.2016**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–17 = 5 • 18–21 = 4 • 22–26 = 3 • 27–30 = 2 • 31–34 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 12\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2\,\mathrm{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 500\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2\,\Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = R\,I^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[P] =$ 37.49 (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{x^2 - 6x + 9}{15}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

   Berechnen Sie:

   (a) Die Normierungskonstante C

   ➽ **Ergebnis:** $C =$ 0.1457 (1P) ___

   (b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ 3 (1P) ___

   (c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.1581 (1P) ___

   (d) den Erwartungswert des Stichprobenmedians $\tilde{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\tilde{x}] =$ 3 (1P) ___

   (e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 0.1982 (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 187.3$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.4984 (1P) ___

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.1340 (1P) ___

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 0.6674 (1P) ___

(d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.0597 (1P) ___

(e) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ $[1.2032, 1.9097]$ (2P) ___

4. Sie messen eine unbekannte Größe μ viermal mit verschiedener Genauigkeit σ_i und erhalten folgende Messwerte $x_i = \mu + \varepsilon_i$:

i	1	2	3	4
x_i	29.11	25.86	21.27	25.51
σ_i	1.92	1.73	2.04	1.84

Nehmen Sie an, dass die Messfehler ε_i normalverteilt mit Mittel 0 und Standardabweichung σ_i sind. Berechnen Sie:

(a) den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}$ von μ.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\mu} =$ 25.5754 (2P) ___

(b) die Fisherinformation I_μ der Messreihe.

➽ **Ergebnis:** $I_\mu =$ 1.1411 (2P) ___

(c) die Standardabweichung von $\hat{\mu}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\mu}] =$ 0.9362 (2P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[39.5043, 40.0557]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ 3.5725 (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T =$ -1.5768 (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

6. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Paretoverteilung mit der folgenden Dichte stammen:

$$f(x) = \begin{cases} 24\,x^{-4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

Gruppe	Anzahl
$2 \leq x \leq 2.5$	50
$2.5 \leq x \leq 3$	27
$3 \leq x \leq 4$	23
$4 \leq x$	20

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 8.6054 (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 7.8147 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___