Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–19 = 5 • 20–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 5\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2\,\mathrm{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 200\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2\,\Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = RI^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➻ **Ergebnis:** $\sigma[P] =$ .... (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + 4x + 4}{18}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$
Berechnen Sie:

(a) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ .... (1P) ___

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

(c) den Erwartungswert des Stichprobenmedians $\tilde{x}$.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\tilde{x}] =$ .... (1P) ___

(d) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ .... (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 243.6$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (e) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➽ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ .... (2P) ___

4. Eine unabhängige Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}\, x^2 \exp\left(-\dfrac{x^2}{2v}\right)}{\sqrt{\pi}\, v^{3/2}}, \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie anhand der Stichprobe:

(a) den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{v}$ von v.

➽ **Ergebnis:** $\hat{v} =$ .... (3P) ___

(b) den Erwartungswert von $\hat{v}$. *Hinweis:* Wenn X Maxwell-Boltzmann-verteilt ist, ist die Erwartung von X^2 gleich $3v$.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\hat{v}] =$ .... (1P) ___

(c) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich v. *Hinweis:* siehe (b)

➽ **Ergebnis:** $I_v =$ .... (2P) ___

(d) die Varianz von $\hat{v}$. *Hinweis:* Der ML-Schätzer ist effizient.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{var}[\hat{v}] =$ .... (1P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. In einem Labor wird 100 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 221 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 2 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle stammen aus einem Experiment zur Messung der Myonlebensdauer. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die Daten in der Tabelle signifikant von der Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 2.197$ abweichen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x \leq 0.5$	194
$0.5 \leq x \leq 1$	117
$1 \leq x \leq 1.5$	111
$1.5 \leq x \leq 2.5$	165
$2.5 \leq x \leq 4$	163
$4 \leq x$	139

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Statistik 142.090/SS2015 **Lösung** **4.9.2015**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–19 = 5 • 20–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 5\,\text{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2\,\text{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 200\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2\,\Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = RI^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[P] =$ 6.4031 (4P) ___

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left(-\frac{x^2+4x+4}{18}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$
   Berechnen Sie:

   (a) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\bar{x}] =$ -2 (1P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.1732 (2P) ___

   (c) den Erwartungswert des Stichprobenmedians $\tilde{x}$.

   ➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\tilde{x}] =$ -2 (1P) ___

   (d) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 0.2171 (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 243.6$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.9488 (1P) ___

   (b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.1743 (1P) ___

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 0.5131 (1P) ___

(d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.0459 (1P) ___

(e) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ $[1.6477, 2.3412]$ (2P) ___

4. Eine unabhängige Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}\, x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right)}{\sqrt{\pi}\, v^{3/2}}, \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie anhand der Stichprobe:

(a) den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{v}$ von v.

➽ **Ergebnis:** $\hat{v} = \frac{\sum x_i^2}{3n}$ (3P) ___

(b) den Erwartungswert von $\hat{v}$. *Hinweis:* Wenn X Maxwell-Boltzmann-verteilt ist, ist die Erwartung von X^2 gleich $3v$.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{E}[\hat{v}] = v$ (1P) ___

(c) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich v. *Hinweis:* siehe (b)

➽ **Ergebnis:** $I_v = \frac{3n}{2v^2}$ (2P) ___

(d) die Varianz von $\hat{v}$. *Hinweis:* Der ML-Schätzer ist effizient.

➽ **Ergebnis:** $\mathrm{var}[\hat{v}] = \frac{2v^2}{3n}$ (1P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[39.5043, 40.0557]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ 3.5725 (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T = \ -1.5768$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

6. In einem Labor wird 100 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 221 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} = \ 2.21$ (1P) ___

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] = \ 0.1487$ (1P) ___

(c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 2 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➽ **Ergebnis:** $T = \ 221$ (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $q = \ 234$ (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle stammen aus einem Experiment zur Messung der Myonlebensdauer. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die Daten in der Tabelle signifikant von der Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 2.197$ abweichen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x \leq 0.5$	194
$0.5 \leq x \leq 1$	117
$1 \leq x \leq 1.5$	111
$1.5 \leq x \leq 2.5$	165
$2.5 \leq x \leq 4$	163
$4 \leq x$	139

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T = \ 9.7860$ (4P) ___

➠ **Ergebnis:** $q =$ 11.0705 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➠ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___