Statistik 142.090/SS2016 **1. Prüfung** **30.6.2016**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–38 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. In einem Experiment wird der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ eines Teilchens gemessen mit $p_T = 2.07\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_T] = 0.024\,\mathrm{GeV}/c$. Unabhängig davon wird der Longitudinalimpuls p_z gemessen mit $p_z = 6.13\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_z] = 0.082\,\mathrm{GeV}/c$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[p]$ des Impulses $p = \sqrt{p_T^2 + p_z^2}$ mit linearer Fehlerfortpflanzung.

   Anmerkung: GeV/c ist eine in der Teilchenphysik übliche Einheit des Impulses.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[p] \approx$ .... (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Normierungskonstante k

➽ **Ergebnis:** $k =$ .... (1P) ___

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

(c) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ .... (2P) ___

Hinweis: Die Varianz der Verteilung ist gleich $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 75$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 103.4$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➽ **Ergebnis:** $c =$ .... (2P) ___

4. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{p\, c^p}{x^{p+1}}, \quad x \geq c > 0$$

c wird als bekannt vorausgesetzt. Bestimmen Sie

(a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

➽ **Ergebnis:** $\hat{p} =$ .... (3P) ___

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich p

➽ **Ergebnis:** $I_p =$ .... (2P) ___

Hinweis: Die Fisher-Information ist der Erwartungswert der negativen zweiten Ableitung der Log-Likelihoodfunktion nach p.

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{p}$ für großes n.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{p}] \approx$ .... (1P) ___

Hinweis: Die Varianz von $\hat{p}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.27$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.55$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 90 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 881 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (c) Schätzen Sie die mittlere Wartezeit τ zwischen zwei Zerfällen (in Sekunden) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (d) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate mindestens 10 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (e) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Cauchyverteilung stammen.

   Hinweis: Die Dichte der Cauchyverteilung ist $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, die Verteilungsfunktion ist $F(x) = 1/2 + \arctan(x)/\pi$.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -3$	14
$-3 \leq x \leq -1$	49
$-1 \leq x \leq 0$	84
$0 \leq x \leq 1$	79
$1 \leq x \leq 3$	54
$3 \leq x < \infty$	20

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➡ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

   ➡ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (b) Muss die Hypothese verworfen werden?

   ➡ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–18 = 5 • 19–23 = 4 • 24–28 = 3 • 29–33 = 2 • 34–38 = 1

!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!

1. In einem Experiment wird der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ eines Teilchens gemessen mit $p_T = 2.07\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_T] = 0.024\,\mathrm{GeV}/c$. Unabhängig davon wird der Longitudinalimpuls p_z gemessen mit $p_z = 6.13\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_z] = 0.082\,\mathrm{GeV}/c$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[p]$ des Impulses $p = \sqrt{p_T^2 + p_z^2}$ mit linearer Fehlerfortpflanzung.

   Anmerkung: GeV/c ist eine in der Teilchenphysik übliche Einheit des Impulses.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[p] \approx$ 0.0781 (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie

   (a) die Normierungskonstante k

   ➽ **Ergebnis:** $k =$ 0.75 (1P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0316 (2P) ___

   (c) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.0471 (2P) ___

   Hinweis: Die Varianz der Verteilung ist gleich $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 75$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 103.4$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.3787 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.1592 (1P) ___

(c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Ergebnis:** $c =$ 1.8355 (2P) ___

4. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{p\, c^p}{x^{p+1}}, \quad x \geq c > 0$$

c wird als bekannt vorausgesetzt. Bestimmen Sie

(a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

➽ **Ergebnis:** $\hat{p} = \dfrac{n}{\sum(\ln x_i - \ln c)}$ (3P) ___

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich p

➽ **Ergebnis:** $I_p = \dfrac{n}{p^2}$ (2P) ___

Hinweis: Die Fisher-Information ist der Erwartungswert der negativen zweiten Ableitung der Log-Likelihoodfunktion nach p.

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{p}$ für großes n.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{p}] \approx \dfrac{p}{\sqrt{n}}$ (1P) ___

Hinweis: Die Varianz von $\hat{p}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.27$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.55$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] = [49.0230, 49.5170]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] = [1.1949, 2.0917]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T = -5.8635$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 90 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 881 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 9.7889 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.3298 (1P) ___

   (c) Schätzen Sie die mittlere Wartezeit τ zwischen zwei Zerfällen (in Sekunden) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 0.1022 (1P) ___

   (d) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate mindestens 10 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ -0.6333 (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ -1.645 (1P) ___

   (e) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Cauchyverteilung stammen.
   Hinweis: Die Dichte der Cauchyverteilung ist $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$, die Verteilungsfunktion ist $F(x) = 1/2 + \arctan(x)/\pi$.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -3$	14
$-3 \leq x \leq -1$	49
$-1 \leq x \leq 0$	84
$0 \leq x \leq 1$	79
$1 \leq x \leq 3$	54
$3 \leq x < \infty$	20

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 16.7814 (4P) ___

➠ **Ergebnis:** $q =$ 11.0705 (1P) ___

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➠ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___