Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

1. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 110\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.25\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung, unter der Annahme, dass die Messungen unkorreliert sind.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ .... (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 150$ stammt aus der Pareto-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 24\,x^{-4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) den Erwartungswert μ der Verteilung

➽ **Ergebnis:** $\mu =$ .... (1P) ___

(b) den Median m der Verteilung

➽ **Ergebnis:** $m =$ .... (1P) ___

(c) die Varianz σ^2 der Verteilung

➽ **Ergebnis:** $\sigma^2 =$ .... (2P) ___

(d) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (2P) ___

(e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ .... (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 120$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 191.4$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ .... (1P) ___

   (c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➽ **Ergebnis:** $c =$ .... (2P) ___

4. Die Stichprobe

$$4.7559, 1.8134, 1.1837, 3.1872, 3.5694, 2.0171, 2.1767, 1.3848, 3.3080, 2.3361$$

stammt aus einer Rayleighverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x}{s^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right), \quad x \geq 0$$

Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{s}$ von s.

➽ **Ergebnis:** $\hat{s} =$ .... (5P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 140$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.41$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.32$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 60 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 609 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (1P) ___

   (c) Schätzen Sie die mittlere Wartezeit τ zwischen zwei Zerfällen (in Sekunden) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (d) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate höchstens 10 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (e) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Standardnormalverteilung stammen.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -1.5$	34
$-1.5 \leq x \leq -0.5$	166
$-0.5 \leq x \leq 0$	144
$0 \leq x \leq 0.5$	139
$0.5 \leq x \leq 1.5$	166
$1.5 \leq x < \infty$	51

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

1. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 110\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.25\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung, unter der Annahme, dass die Messungen unkorreliert sind.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[G]/G =$ 2.24% (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 150$ stammt aus der Pareto-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 24\,x^{-4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie

   (a) den Erwartungswert μ der Verteilung

   ➠ **Ergebnis:** $\mu =$ 3 (1P) ___

   (b) den Median m der Verteilung

   ➠ **Ergebnis:** $m =$ 2.5198 (1P) ___

   (c) die Varianz σ^2 der Verteilung

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma^2 =$ 3 (2P) ___

   (d) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.1414 (2P) ___

   (e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.0686 (2P) ___

3. Eine Messreihe der Länge $n = 120$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 191.4$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.5950 (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] =$ 0.1456 (1P) ___

(c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Ergebnis:** $c =$ 1.9939 (2P) ___

4. Die Stichprobe

$$4.7559, 1.8134, 1.1837, 3.1872, 3.5694, 2.0171, 2.1767, 1.3848, 3.3080, 2.3361$$

stammt aus einer Rayleighverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x}{s^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right), \quad x \geq 0$$

Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{s}$ von s.

➽ **Ergebnis:** $\hat{s} =$ 1.9664 (5P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 140$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.41$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.32$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[49.2180, 49.6020]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $[V_1, V_2] =$ $[1.0573, 1.6949]$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T =$ -6.0762 (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

6. Eine radioaktive Quelle wird 60 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 609 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 10.15 (1P) ___

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.4113 (1P) ___

(c) Schätzen Sie die mittlere Wartezeit τ zwischen zwei Zerfällen (in Sekunden) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 0.0985 (1P) ___

(d) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate höchstens 10 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 0.3674 (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 1.6449 (1P) ___

(e) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Standardnormalverteilung stammen.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -1.5$	34
$-1.5 \leq x \leq -0.5$	166
$-0.5 \leq x \leq 0$	144
$0 \leq x \leq 0.5$	139
$0.5 \leq x \leq 1.5$	166
$1.5 \leq x < \infty$	51

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 4.9171 (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 11.0705 (1P) ___

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___