**Zuname:** ...................................... **Vorname:** .........................

**Matrikel-/Kennnummer:** ................. / ........... **Punkte:** ..... **Note:** .....

**Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1**

**!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!**

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 6.8\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2.5\,\mathrm{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 100\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.4\,\Omega$. Berechnen Sie den **relativen** Standardfehler der Wärmeleistung $P = R\,I^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung in Prozent.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[P]/P =$ ....................... (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Dreiecksverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ ...................... (3P) ___

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ ...................... (3P) ___

**Hinweis**: Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Verteilung mittels Integration und den Median mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert $\tau$. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 317.5$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von $\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ ...................... (1P) ___

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] \approx$ ...................... (2P) ___

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert $\tau$.

   ➽ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ ...................... (3P) ___

4. Die Stichprobe

$$0.5123, -0.2474, 5.1592, -0.2265, -1.1457, 5.8187, 3.1959, 1.5088, 0.1086, -0.0894, 4.6190, 0.0746$$

stammt aus einer zweiseitigen Exponentialverteilung (Laplace-Verteilung) mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp\left(-\lambda\,|x|\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ von $\lambda$.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ ........................ (5P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert $\mu$ und unbekannter Varianz $\sigma^2$. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 51.21$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.28$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert $\mu$.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ ...................... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz $\sigma^2$.

   ➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ ...................... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße $T$?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ ...................... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.01$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein ...................... (1P) ___

6. In einem Labor wird 90 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 286 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate $\lambda$ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ ...................... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ ...................... (2P) ___

   (c) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 3 Hz ist. Geben Sie die Testgröße $T$ und das Quantil $q$ an, mit dem $T$ verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ ...................... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ ...................... (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein ...................... (1P) ___

7. Testen Sie mit dem $\chi^2$-Test die Nullhypothese, dass die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle von Daten aus einer Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 3$ stammen.

| Gruppe | Anzahl |
|---|---|
| $0 \leq x \leq 1$ | 51 |
| $1 \leq x \leq 2$ | 46 |
| $2 \leq x \leq 4$ | 55 |
| $4 \leq x \leq 6$ | 19 |
| $6 \leq x$ | 19 |

(a) Berechnen Sie die Testgröße $T$ und das Quantil $q$, mit dem $T$ verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ ...................... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ ...................... (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ...................... (1P) ___

**Zuname:** ................................... **Vorname:** ........................

**Matrikel-/Kennnummer:** ................. / ........... **Punkte:** ..... **Note:** .....

**Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1**

**!!!!! Bitte das Endresultat auf der punktierten Linie eintragen !!!!!**

1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 6.8\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $2.5\,\mathrm{mA}$. Der Widerstandswert ist $R = 100\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.4\,\Omega$. Berechnen Sie den **relativen** Standardfehler der Wärmeleistung $P = R\,I^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung in Prozent.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[P]/P =$ 0.41% (5P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Dreiecksverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0333 (3P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.05 (3P) ___

   **Hinweis**: Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Verteilung mittels Integration und den Median mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert $\tau$. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 317.5$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von $\tau$.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 2.1167 (1P) ___

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] \approx$ 0.1728 (2P) ___

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert $\tau$.

   ➠ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ $[1.7310, 2.6385]$ (3P) ___

4. Die Stichprobe

$$0.5123, -0.2474, 5.1592, -0.2265, -1.1457, 5.8187, 3.1959, 1.5088, 0.1086, -0.0894, 4.6190, 0.0746$$

stammt aus einer zweiseitigen Exponentialverteilung (Laplace-Verteilung) mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp\left(-\lambda\,|x|\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ von $\lambda$.

➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 0.5285 (5P) ___

5. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert $\mu$ und unbekannter Varianz $\sigma^2$. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 51.21$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.28$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert $\mu$.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ $[50.9453, 51.4747]$ (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz $\sigma^2$.

   ➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ 1.7572 (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße $T$?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 11.9574 (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.01$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

6. In einem Labor wird 90 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 286 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate $\lambda$ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 3.1778 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.1879 (2P) ___

   (c) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 3 Hz ist. Geben Sie die Testgröße $T$ und das Quantil $q$ an, mit dem $T$ verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 0.9737 (1P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 2.3263 (1P) ___

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

7. Testen Sie mit dem $\chi^2$-Test die Nullhypothese, dass die gruppierten Häufigkeiten in der Tabelle von Daten aus einer Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 3$ stammen.

| Gruppe | Anzahl |
|---|---|
| $0 \leq x \leq 1$ | 51 |
| $1 \leq x \leq 2$ | 46 |
| $2 \leq x \leq 4$ | 55 |
| $4 \leq x \leq 6$ | 19 |
| $6 \leq x$ | 19 |

(a) Berechnen Sie die Testgröße $T$ und das Quantil $q$, mit dem $T$ verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ 5.7059 (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ 9.4877 (1P) ___

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___