Statistik 142.090/SS2018 **2. Prüfung** **3.9.2018**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–31 = 3 • 32–37 = 2 • 38–42 = 1

1. Zwei Ohmsche Widerstände R_1 und R_2 sind parallel geschaltet. Die Widerstandswerte $R_1 = 500\,\Omega$ und $R_2 = 1500\,\Omega$ sind mit einer relativen Unsicherheit von jeweils 1% bekannt. Berechnen Sie den relativen Standardfehler $\sigma[R]/R$ des Gesamtwiderstands $R = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung, unter der Annahme, dass die Unsicherheiten unkorreliert sind.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[R]/R =$ .... (4P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 \cdot (2x - x^2), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➠ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ .... (3P) ___

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➠ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ .... (3P) ___

Hinweis: BenÃ¼tzen Sie die Symmetrie der Dichte fÃ¼r Mittelwert und Median. Berechnen Sie die Varianz mittels Integration.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 240$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 287.2$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➠ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➠ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] \approx$ .... (2P) ___

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➠ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ .... (3P) ___

4. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus der Gammaverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x^3 \exp(-x/b)}{6\, b^4},\ x \geq 0.$$

Bestimmen Sie

(a) den ML-Schätzer $\hat{b}$ von b

➽ **Ergebnis:** $\hat{b} =$ .... (3P) ___

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich b

➽ **Ergebnis:** $I_b =$ .... (2P) ___

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{b}$ für großes n.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{b}] \approx$ .... (1P) ___

Hinweis: Die Varianz von $\hat{b}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 175$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 61.33$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.54$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] =$ .... (2P) ___

   (b) Berechnen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ **Ergebnis:** $V_1 =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 60$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

   (d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 1.5$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

6. In einem Labor wird 60 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 277 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ .... (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ .... (2P) ___

   (c) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 4 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Verteilung mit der Dichte $f(x) = (x+1)/4, 0 \leq x \leq 2$ stammen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x < 0.5$	32
$0.5 \leq x < 0.9$	32
$0.9 \leq x < 1.2$	30
$1.2 \leq x < 1.5$	43
$1.5 \leq x < 1.8$	31
$1.8 \leq x \leq 2$	32

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Ergebnis:** $T =$ .... (4P) ___

➽ **Ergebnis:** $q =$ .... (1P) ___

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Ergebnis:** ja/nein .... (1P) ___

Statistik 142.090/SS2018 **Lösung** **3.9.2018**

Zuname: .... **Vorname:** ....

Matrikel-/Kennnummer: .... / .... **Punkte:** ..... **Note:** .....

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–31 = 3 • 32–37 = 2 • 38–42 = 1

1. Zwei Ohmsche Widerstände R_1 und R_2 sind parallel geschaltet. Die Widerstandswerte $R_1 = 500\,\Omega$ und $R_2 = 1500\,\Omega$ sind mit einer relativen Unsicherheit von jeweils 1% bekannt. Berechnen Sie den relativen Standardfehler $\sigma[R]/R$ des Gesamtwiderstands $R = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung, unter der Annahme, dass die Unsicherheiten unkorreliert sind.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[R]/R =$ 0.79% (4P) ___

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 \cdot (2x - x^2), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0316 (3P) ___

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.0471 (3P) ___

   Hinweis: BenÃ¼tzen Sie die Symmetrie der Dichte fÃ¼r Mittelwert und Median. Berechnen Sie die Varianz mittels Integration.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 240$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 287.2$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\tau} =$ 1.1967 (1P) ___

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\tau}] \approx$ 0.0772 (2P) ___

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

   ➽ **Ergebnis:** $[c_1, c_2] =$ $[1.0192, 1.4220]$ (3P) ___

4. Eine Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ stammt aus der Gammaverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x^3 \exp(-x/b)}{6\, b^4}, \quad x \geq 0.$$

Bestimmen Sie

(a) den ML-Schätzer $\hat{b}$ von b

➽ **Ergebnis:** $\hat{b} = \dfrac{\sum x_i}{4\, n}$ (3P) ___

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich b

➽ **Ergebnis:** $I_b = \dfrac{4\, n}{b^2}$ (2P) ___

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{b}$ für großes n.

➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{b}] \approx \dfrac{b}{2\sqrt{n}}$ (1P) ___

Hinweis: Die Varianz von $\hat{b}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 175$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 61.33$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.54$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Ergebnis:** $[M_1, M_2] = [61.0857, 61.5743]$ (2P) ___

(b) Berechnen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Ergebnis:** $V_1 = 2.0063$ (2P) ___

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 60$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T = 14.1778$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

(d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 1.5$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Ergebnis:** $T = 178.64$ (1P) ___

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___

6. In einem Labor wird 60 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 277 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

   ➽ **Ergebnis:** $\hat{\lambda} =$ 4.6167 (1P) ___

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

   ➽ **Ergebnis:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.2774 (2P) ___

   (c) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 4 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 2.3883 (1P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ 2.3263 (1P) ___

   (d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein ja (1P) ___

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Verteilung mit der Dichte $f(x) = (x+1)/4, 0 \leq x \leq 2$ stammen.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x < 0.5$	32
$0.5 \leq x < 0.9$	32
$0.9 \leq x < 1.2$	30
$1.2 \leq x < 1.5$	43
$1.5 \leq x < 1.8$	31
$1.8 \leq x \leq 2$	32

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

   ➽ **Ergebnis:** $T =$ 4.0943 (4P) ___

   ➽ **Ergebnis:** $q =$ 11.0705 (1P) ___

   (b) Muss die Hypothese verworfen werden?

   ➽ **Ergebnis:** ja/nein nein (1P) ___