1 Fehlerfortpflanzung

1.1. An einem Ohmschen Widerstand wird ein Strom von $I = 12\,\mathrm{A}$ gemessen. Der Standardfehler des Messgeräts ist $0.002\,\mathrm{A}$. Der Widerstandswert ist $R = 500\,\Omega$, mit einer Standardabweichung von $\sigma[R] = 0.2\,\Omega$. Berechnen Sie den Standardfehler der Wärmeleistung $P = RI^2$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Lösung:** $\sigma[P] = \ 37.49\,\mathrm{W}$

1.2. In einem Experiment wird der Transversalimpuls $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ eines Teilchens gemessen mit $p_T = 2.07\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_T] = 0.024\,\mathrm{GeV}/c$. Unabhängig davon wird der Longitudinalimpuls p_z gemessen mit $p_z = 6.13\,\mathrm{GeV}/c$ und $\sigma[p_z] = 0.082\,\mathrm{GeV}/c$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[p]$ des Impulses $p = \sqrt{p_T^2 + p_z^2}$ mit linearer Fehlerfortpflanzung.

Anmerkung: GeV/c ist eine in der Teilchenphysik übliche Einheit des Impulses.

➽ **Lösung:** $\sigma[p] \approx \ 0.0781\,\mathrm{GeV}/c$

1.3. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 110\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 0.25\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Leitwerts $G = I/U$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung, und zwar

(a) unter der Annahme, dass die Messungen unkorreliert sind;

➽ **Lösung:** $\sigma[G]/G = \ 2.24\%$

(b) unter der Annahme, dass die Messungen mit $\rho = -0.5$ korreliert sind.

➽ **Lösung:** $\sigma[G]/G = \ 2.65\%$

1.4. In einem rechtwinkligen Dreieck wird die Länge der Kathete a gemessen mit $a = 3.13\,\mathrm{km}$ und Standardfehler $\sigma[a] = 30\,\mathrm{m}$. Unabhängig davon wird die Hypotenuse c gemessen mit $c = 8.44\,\mathrm{km}$ und $\sigma[c] = 25\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie den Standardfehler $\sigma[b]$ der Kathete b (in Metern) mit linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Lösung:** $\sigma[b] \approx \ 29.47\,\mathrm{m}$

2 Stichprobenmomente

2.1. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Normierungskonstante k

➽ **Lösung:** $k =$ 0.75

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Lösung:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0316

(c) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Lösung:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.0471

Hinweis: Berechnen Sie die Varianz der Verteilung mittels Integration.

2.2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 160$ stammt aus der Pareto-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{64}{x^5}, \quad x \ge 2$$

Bestimmen Sie

(a) den Erwartungswert μ der Verteilung

➽ **Lösung:** $\mu =$ $8/3 = 2.\bar{6}$

(b) den Median m der Verteilung

➽ **Lösung:** $m =$ 2.3784

(c) die Varianz σ^2 der Verteilung

➽ **Lösung:** $\sigma^2 =$ $8/9 = 0.\dot{8}$

(d) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Lösung:** $\sigma[\bar{x}] =$ 0.0745

(e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Lösung:** $\sigma[\tilde{x}] \approx$ 0.0470

2.3. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus der Mischverteilung mit der Dichte

$$f(x) = 0.9 \cdot \varphi(x; 0, 1.2) + 0.1 \cdot \varphi(x; 0, 7.3),$$

wobei $\varphi(x; \mu, \sigma^2)$ die Dichte der Normalverteilung mit Mittel μ und Varianz σ^2 ist. Berechnen Sie

(a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$

➽ **Lösung:** $\sigma[\bar{x}] = \ 0.0851$

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

➽ **Lösung:** $\sigma[\tilde{x}] = \ 0.0923$

2.4. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 150$ stammt aus der Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels

➽ **Lösung:** $\sigma[\bar{x}] = \ 0.0235$

(b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).

➽ **Lösung:** $\sigma[\tilde{x}] \approx \ 0.0400$

Hinweis: Berechnen Sie Erwartung und Varianz mittels Integration, sowie den Median mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

2.5. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 300$ stammt aus der Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{x^2 - 6x + 9}{15}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie:

(a) Die Normierungskonstante C

➽ **Lösung:** $C = \ 0.1457$

(b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Lösung:** $\mathrm{E}[\bar{x}] = \ 0$

(c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

➽ **Lösung:** $\sigma[\bar{x}] = \ 0.1581$

(d) den Erwartungswert des Stichprobenmedians $\tilde{x}$.

➠ **Lösung:** $\mathrm{E}[\tilde{x}] =$ 0

(e) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$ (asymptotischer Wert).

➠ **Lösung:** $\sigma[\tilde{x}] =$ 0.1982

3 Maximum-Likelihood-Schätzung

3.1. Die Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Rayleighverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x}{v} \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right), \quad x \geq 0$$

Bestimmen Sie:

(a) den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{v}$ von v

➠ **Lösung:** $\hat{v} = \dfrac{\sum x_i^2}{2n}$

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich v. *Hinweis:* Wenn X Rayleigh-verteilt ist, ist die Erwartung von X^2 gleich $2v$.

➠ **Lösung:** $I_v = \dfrac{n}{v^2}$

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{v}$ für großes n.

➠ **Lösung:** $\sigma[\hat{v}] \approx \dfrac{v}{\sqrt{n}}$

Hinweis: Die Varianz von $\hat{v}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

3.2. Die Stichprobe

$$1.413, 5.450, 1.804, 6.606, 3.463, 3.589, 4.792, 0.210, 1.022, 2.551$$

stammt aus einer Maxwell-Boltzmannverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{s^3} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right), \quad x \geq 0$$

Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{s}$ von s.

➠ **Lösung:** $\hat{s} = \left(\dfrac{1}{3\,n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = 2.1136$

Für die Herleitung siehe Seite 16!

3.3. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{p\,c^p}{x^{p+1}}, \quad x \geq c > 0$$

c wird als bekannt vorausgesetzt. Bestimmen Sie

(a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

➠ **Lösung:** $\hat{p} = \dfrac{n}{\sum(\ln x_i - \ln c)}$

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich p

➽ **Lösung:** $I_p = \dfrac{n}{p^2}$ (2P) ___

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{p}$ für großes n.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{p}] \approx \dfrac{p}{\sqrt{n}}$

Hinweis: Die Varianz von $\hat{p}$ ist asymptotisch gleich der inversen Fisherinformation.

4 Binomialverteilung

4.1. Sie entnehmen einer großen Lieferung von Dioden zufällig $n = 20$ Stück. Sie wissen, daß die Fehlerquote p bei der Produktion als $p = 0.025$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, daß Sie höchstens $k = 2$ fehlerhafte Dioden ziehen.

➽ **Lösung:** $W =$ 0.987

(b) Berechnen Sie Erwartungswert $E[k]$ und Standardabweichung $\sigma[k]$ der Anzahl k der fehlerhaften Stücke.

➽ **Lösung:** $E[k] =$ 0.5

➽ **Lösung:** $\sigma[k] =$ 0.6982

(c) Wie klein muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer fehlerlosen Stichprobe vom Umfang $n = 8$ gleich 99% ist?

➽ **Lösung:** $p =$ 0.0013

4.2. Bei einer Umfrage antworten auf die Frage "Kennen Sie die Binomialverteilung?" 118 von 300 TU-Student/innen mit "Ja".

(a) Schätzen Sie den Bekanntheitsgrad p mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Lösung:** $\hat{p} =$ 0.3933

(b) Geben sie ein 95%-iges symmetrisches Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ für p an (Bootstrapmethode).

➽ **Lösung:** $[p_1, p_2] =$ $[0.337, 0.450]$

(c) Testen Sie die Hypothese, dass der Bekannheitsgrad mindestens 40% beträgt. Benützen Sie dabei die Näherung durch die Normalverteilung. Welchen Wert hat die Testgröße?

➽ **Lösung:** $T =$ -0.236

(d) Muss die Hypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ verworfen werden?

➽ **Lösung:** nein

4.3. Eine Münze wird $n = 8$ mal unabhängig geworfen. Die Wahrscheinlichkeit von „Zahl" sei gleich p, die beobachtete Anzahl von „Zahl" sei gleich k. Sie wollen die Nullhypothese $H_0 : p = 0.5$ testen und verwerfen sie, wenn $k = 0$ oder $k = n$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit α eines Fehlers 1. Art?

➽ **Lösung:** $\alpha =$ 0.0078

(b) Geben Sie die Gütefunktion des Test an.

➽ **Lösung:** $1 - \beta(p) = \ p^n + (1-p)^n$

(c) Wie groß ist die Güte des des Test, wenn $p = 0.9$?

➽ **Lösung:** $1 - \beta(0.9) = \ 0.4305$

5 Normalverteilung

5.1. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 39.78$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 2.92$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Lösung:** $[M_1, M_2] =$ $[39.5043, 40.0557]$

(b) Berechnen Sie das linksseitige 95%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Lösung:** $V_1 =$ 3.5725

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 40$. Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Lösung:** $T =$ -1.5768

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Lösung:** nein

(d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 2.5$. Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Lösung:** $T =$ 178.49

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Lösung:** nein

5.2. Sie messen eine unbekannte Größe μ viermal mit verschiedener Genauigkeit σ_i und erhalten folgende Messwerte $x_i = \mu + \varepsilon_i$:

i	1	2	3	4
x_i	29.11	25.86	21.27	25.51
σ_i	1.92	1.73	2.04	1.84

Nehmen Sie an, dass die Messfehler ε_i normalverteilt mit Mittel 0 und Standardabweichung σ_i sind. Berechnen Sie:

(a) den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}$ von μ.

➽ **Lösung:** $\hat{\mu} =$ 25.5754

(b) die Fisherinformation I_μ der Messreihe.

➽ **Lösung:** $I_\mu =$ 1.1411

(c) die Standardabweichung von $\hat{\mu}$.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\mu}] =$ 0.9362

5.3. Eine Messreihe der Länge $n = 100$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.27$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.55$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ **Lösung:** $[M_1, M_2] =$ $[49.023, 49.517]$

(b) Berechnen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[V_1, V_2]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ **Lösung:** $[V_1, V_2] =$ $[1.195, 2.092]$

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$. Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ **Lösung:** $T =$ -5.8635

Muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ **Lösung:** ja

6 Exponentialverteilung

6.1. Eine Messreihe der Länge $n = 75$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 103.4$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

➽ **Lösung:** $\hat{\tau} =\ 1.3787$

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\tau}] =\ 0.1592$

(c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Lösung:** $c =\ 1.8355$

6.2. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 187.3$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.

➽ **Lösung:** $\hat{\tau} =\ 1.4984$

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler von $\hat{\tau}$ an.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\tau}] =\ 0.1340$

(c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ von $\lambda = 1/\tau$.

➽ **Lösung:** $\hat{\lambda} =\ 0.6674$

(d) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\lambda}$ mittels linearer Fehlerfortpflanzung.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\lambda}] =\ 0.0597$

(e) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.

➽ **Lösung:** $[c_1, c_2] =\ [1.2032, 1.9097]$

(f) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[d_1, d_2]$ für den unbekannten Wert λ.

➽ **Lösung:** $[d_1, d_2] =\ [0.5237, 0.8311]$

7 Poissonverteilung

7.1. Eine radioaktive Quelle wird 90 Sekunden lang beobachtet. Es werden insgesamt 881 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Zerfallsrate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Lösung:** $\hat{\lambda} =$ 9.7889

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.3298

(c) Schätzen Sie die mittlere Wartezeit τ zwischen zwei Zerfällen (in Sekunden) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Lösung:** $\hat{\tau} =$ 0.1022

(d) Testen Sie **mit** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Zerfallsrate mindestens 10 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Lösung:** $T =$ -0.6333

➽ **Lösung:** $q =$ -1.645

(e) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** nein

7.2. In einem Labor wird 100 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 221 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ **Lösung:** $\hat{\lambda} =$ 2.21

(b) Geben Sie näherungsweise den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ **Lösung:** $\sigma[\hat{\lambda}] =$ 0.1487

(c) Testen Sie **ohne** Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 2 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➽ **Lösung:** $T =$ 221

➽ **Lösung:** $q =$ 234

(d) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** nein

8 Anpassungstest

8.1. Testen Sie mit dem χ^2-Test, ob die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Paretoverteilung mit der folgenden Dichte stammen:

$$f(x) = \begin{cases} 24/x^4, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

Gruppe	Anzahl
$2 \leq x \leq 2.5$	50
$2.5 \leq x \leq 3$	27
$3 \leq x \leq 4$	23
$4 \leq x$	20

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Lösung:** $T =$ 3.257

➽ **Lösung:** $q =$ 7.815

(b) Muss die Nullhypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** ja

8.2. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Cauchyverteilung stammen.
Hinweis: Die Dichte der Cauchyverteilung ist $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$, die Verteilungsfunktion ist $F(x) = 1/2 + \arctan(x)/\pi,\ -\infty < x < \infty$.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -3$	14
$-3 \leq x \leq -1$	49
$-1 \leq x \leq 0$	84
$0 \leq x \leq 1$	79
$1 \leq x \leq 3$	54
$3 \leq x < \infty$	20

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Lösung:** $T =$ 16.78

➽ **Lösung:** $q =$ 11.07

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** ja

8.3. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Standardnormalverteilung stammen.

Gruppe	Anzahl
$-\infty < x \leq -1$	13
$-1 \leq x \leq 0$	32
$0 \leq x \leq 1$	40
$1 \leq x < \infty$	15

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Lösung:** $T =$ 1.7061

➽ **Lösung:** $q =$ 7.8147

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** nein

8.4. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 2.197$ (mittlere Myonlebensdauer in µs) stammen.
Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist $F(x|\tau) = 1 - e^{x/\tau}$.

Gruppe	Anzahl
$0 < x \leq 0.5$	21
$0.5 \leq x \leq 1$	47
$1 \leq x \leq 2$	41
$2 \leq x \leq 4$	52
$4 \leq x$	36

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ **Lösung:** $T =$ 17.66

➽ **Lösung:** $q =$ 9.488

(b) Muss die Hypothese verworfen werden?

➽ **Lösung:** ja

Lösung von 3.2

Dichte von x_i:

$$f(x_i|s) = C \cdot \frac{x_i^2}{s^3} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2s^2}\right) \tag{1}$$

Likelihoodfunktion $L(s)$:

$$L(s) = C \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} C \cdot \frac{x_i^2}{s^3} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2s^2}\right) \tag{2}$$

Log-Likelihoodfunktion $\ell(s)$:

$$\ell(s) = \log C + \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i) = \log C + \sum_{i=1}^{n} \big(\log(x_i^2) - 3\log(s) - x_i^2/(2s^2)\big) \tag{3}$$

Ableiten nach s:

$$\frac{\partial \ell(s)}{s} = \sum_{i=1}^{n} \left[-3/s + x_i^2/s^3\right] \tag{4}$$

Nullsetzen und Auflösen nach s:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2/s^3 = 3\,n/s \Rightarrow s = \left(\frac{1}{3\,n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \tag{5}$$