Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte die Endresultate im Antwortbogen eintragen !!!!!

1. Sie messen an einem Ohmschen Widerstand einen Spannungsabfall von $U = 24\,\mathrm{V}$, mit einem relativen Standardfehler von 1%, sowie eine Stromstärke von $I = 2\,\mathrm{A}$, mit einem relativen Standardfehler von 2%. Berechnen Sie den relativen Standardfehler des Widerstands $R = U/I$ mittels linearisierter Fehlerfortpflanzung, und zwar,

   (a) unter der Annahme, dass die Unsicherheiten unkorreliert sind;
   ➽ $\sigma[R]/R = ?$

   (b) unter der Annahme, dass die Unsicherheiten mit $\rho = 0.5$ korreliert sind.
   ➽ $\sigma[R]/R = ?$

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 200$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{x^3 e^{-x/4}}{k}, \quad x \geq 0$$

   Berechnen Sie:

   (a) die Konstante k
   ➽ $k = ?$

   (b) den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{x}$
   ➽ $\mathrm{E}[\bar{x}] = ?$

   (c) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$
   ➽ $\sigma[\bar{x}] = ?$

3. Eine Messreihe der Länge $n = 220$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 325.7$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.
   ➽ $\hat{\tau} = ?$

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.
   ➽ $\sigma[\hat{\tau}] \approx ?$

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.
   ➽ $[c_1, c_2] = ?$

4. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = c^p p x^{-p-1}, \quad x \geq c$$

c wird als bekannt vorausgesetzt. Bestimmen Sie:

   (a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

   ➽ $\hat{p} =?$

   (b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich p

   ➽ $I_p =?$

   (c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{p}$ für großes n. *Hinweis:* Der ML-Schätzer ist asymptotisch effizient.

   ➽ $\sigma[\hat{p}] =?$

Hinweis: Geben sie Formeln als Matlab- oder Python-ähnliche Ausdrücke oder als LaTeX-Strings an.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 160$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 49.41$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.61$.

   (a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

   ➽ $[M_1, M_2] =?$

   (b) Berechnen Sie das rechtsseitige 99%-Konfidenzintervall $[V_1, \infty]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

   ➽ $V_1 =?$

   (c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ $T =?$

   (d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ ja/nein?

   (e) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 1.6$.
   Welchen Wert hat die Testgröße T?

   ➽ $T =?$

   (f) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.05$?

   ➽ ja/nein?

6. In einem Labor wird 120 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 374 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.
   ➽ $\hat{\lambda} =?$

   (b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.
   ➽ $\sigma[\hat{\lambda}] =?$

   (c) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 3 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).
   ➽ $T, q =?$

   (d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden?
   ➽ ja/nein?

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 3$ stammen. *Hinweis:* Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

Gruppe	Anzahl
$0 \le x \le 1$	34
$1 \le x \le 2$	29
$2 \le x \le 4$	32
$4 \le x \le 6$	16
$6 \le x$	9

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).
   ➽ $T, q =?$

   (b) Muss die Hypothese abgelehnt werden?
   ➽ ja/nein?

Ich bestätige mit der Abgabe, dass ich nur die erlaubten Hilfsmittel verwendet habe!