Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte die Endresultate im Antwortbogen eintragen !!!!!

1. Zwei Ohmsche Widerstände R_1 und R_2 sind parallel geschaltet. Der Widerstand $R_1 = 750\,\Omega$ und der Gesamtwiderstand $R = 500\,\Omega$ sind mit einer relativen Unsicherheit von jeweils 1% bekannt. Berechnen Sie den relativen Standardfehler $\sigma[R_2]/R_2$ des Widerstands R_2 mittels linearer Fehlerfortpflanzung.
   Hinweis: Es gilt $R = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$

   ➽ $\sigma[R_2]/R_2 =?$

2. Eine unabhängige Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{5}{4\,x^2}, \quad 1 \leq x \leq 5$$

   Berechnen Sie:

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels $\bar{x}$
   ➽ $\sigma[\bar{x}] =?$

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians $\tilde{x}$
   ➽ $\sigma[\tilde{x}] =?$

3. Eine Messreihe der Länge $n = 125$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 274.7$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.
   ➽ $\hat{\tau} =?$

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.
   ➽ $\sigma[\hat{\tau}] \approx ?$

   (c) Bestimmen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, c]$ für den unbekannten Wert τ.
   ➽ $c =?$

4. Ein Bernoulliexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p wird so lange wiederholt, bis $r > 0$ Erfolge eingetreten sind. Die Anzahl K der benötigten Versuche ist eine diskrete Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \geq r, \quad 0 < p < 1$$

und dem Erwartungswert r/p (negative Binomialverteilung).

Es liegt eine Beobachtung k_1 von K vor. Bestimmen Sie für gegebenes r:

(a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

➽ $\hat{p} =$?

(b) die Fisher-Information I_p der Beobachtung bezüglich p

➽ $I_p =$?

(c) den Wert p_0, für den die Fisher-Information minimal ist

➽ $p_0 =$?

Hinweis: Geben sie Formeln als Matlab- oder Python-ähnliche Ausdrücke oder als LaTeX-Strings an.

5. Eine Messreihe der Länge $n = 150$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 54.62$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.33$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ $[M_1, M_2] =$?

(b) Berechnen Sie das rechtsseitige 99%-Konfidenzintervall $[V_1, \infty]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ $V_1 =$?

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 55$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ $T =$?

(d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.01$?

➽ ja/nein?

(e) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 1.3$.
Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ $T =$?

(f) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.01$?

➽ ja/nein?

6. In einem Labor wird 60 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 351 Zerfälle registriert.

   (a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.
   ➽ $\hat{\lambda} =?$

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.
   ➽ $\sigma[\hat{\lambda}] \approx?$

   (c) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 5 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).
   ➽ $T, q =?$

   (d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden?
   ➽ ja/nein?

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus der Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \cos(x)/2, \ -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

stammen.

Gruppe	Anzahl
$-\pi/2 \le x \le -\pi/4$	38
$-\pi/4 \le x \le -\pi/10$	51
$-\pi/10 \le x \le \pi/10$	87
$\pi/10 \le x \le \pi/4$	48
$\pi/4 \le x \le \pi/2$	26

   (a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).
   ➽ $T, q =?$

   (b) Muss die Hypothese abgelehnt werden?
   ➽ ja/nein?

   Hinweis: Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mittels Integration über die Dichte.

Ich bestätige mit der Abgabe, dass ich nur die erlaubten Hilfsmittel verwendet habe!