Statistik 142.090/SS2021 **4. Prüfung** **11.2.2022**

Notenschlüssel: 0–20 = 5 • 21–25 = 4 • 26–30 = 3 • 31–35 = 2 • 36–40 = 1

!!!!! Bitte die Endresultate im Antwortbogen eintragen !!!!!

---

1. Von einem Metallzylinder sind der Radius $r = 1.2\,\mathrm{dm}$ und die Höhe $h = 4\,\mathrm{dm}$ mit einer Unsicherheit von jeweils $1\,\mathrm{mm}$ bekannt. Die Messung der Masse ergibt $m = 152\,\mathrm{kg}$ mit einer Unsicherheit von 0.5%.

   (a) Berechnen Sie die Dichte ρ in $\mathrm{kg/dm}^3$.
   ➽ $\rho = ?$

   (b) Berechnen Sie die relative Unsicherheit der Dichte ρ in Prozent.
   ➽ $\sigma[\rho]/\rho = ?$

2. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 250$ stammt aus der Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(4-x), & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie

   (a) die Standardabweichung des Stichprobenmittels
   ➽ $\sigma[\bar{x}] = ?$

   (b) die Standardabweichung des Stichprobenmedians (asymptotischer Wert).
   ➽ $\sigma[\tilde{x}] \approx ?$

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst k. Benützen Sie die Symmetrie der Dichte für Mittelwert und Median. Berechnen Sie die Varianz mittels Integration.

3. Eine Messreihe der Länge $n = 240$ stammt aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert τ. Die Summe aller Messwerte ist gleich $T = 235.7$.

   (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\tau}$ von τ.
   ➽ $\hat{\tau} = ?$

   (b) Geben Sie den (ungefähren) Standardfehler Ihrer Schätzung an.
   ➽ $\sigma[\hat{\tau}] \approx ?$

   (c) Bestimmen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[c_1, c_2]$ für den unbekannten Wert τ.
   ➽ $[c_1, c_2] = ?$

4. Eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ stammt aus einer Paretoverteilung mit der Dichte

$$f(x) = c^p \cdot p \cdot x^{-p-1}, \quad x \ge c, \quad p > 0$$

   c wird als bekannt vorausgesetzt. Bestimmen Sie:

(a) den ML-Schätzer $\hat{p}$ von p

➽ $\hat{p} =?$

(b) die Fisher-Information der Stichprobe bezüglich p

➽ $I_p =?$

(c) die ungefähre Standardabweichung von $\hat{p}$ für großes n.

Hinweis: Der ML-Schätzer ist asymptotisch effizient.

➽ $\sigma[\hat{p}] =?$

5. Eine Messreihe der Länge $n = 200$ stammt aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 61.21$, die Stichprobenvarianz ist $S^2 = 1.43$.

(a) Berechnen Sie das symmetrische 99%-Konfidenzintervall $[M_1, M_2]$ für den unbekannten Mittelwert μ.

➽ $[M_1, M_2] =?$

(b) Berechnen Sie das linksseitige 99%-Konfidenzintervall $[0, V_1]$ für die unbekannte Varianz σ^2.

➽ $V_1 =?$

(c) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 60$.

Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ $T =?$

(d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ ja/nein?

(e) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 1.5$.

Welchen Wert hat die Testgröße T?

➽ $T =?$

(f) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden, wenn $\alpha = 0.05$?

➽ ja/nein?

6. In einem Labor wird 60 Sekunden lang die Hintergrundstrahlung gemessen. Es werden insgesamt 327 Zerfälle registriert.

(a) Schätzen Sie die mittlere Rate λ (in Hz) mit der Maximum-Likelihood-Methode.

➽ $\hat{\lambda} =?$

(b) Geben Sie den Standardfehler Ihrer Schätzung an.

➽ $\sigma[\hat{\lambda}] =?$

(c) Testen Sie mit Näherung durch Normalverteilung die Nullhypothese, dass die mittlere Rate höchstens 5 Hz ist. Geben Sie die Testgröße T und das Quantil q an, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.01$).

➽ $T, q =?$

(d) Muss die Nullhypothese abgelehnt werden?

➽ ja/nein?

7. Testen Sie mit dem χ^2-Test die Hypothese, dass die gruppierten Daten in der Tabelle aus einer Exponentialverteilung mit Mittel $\tau = 3$ stammen.
Hinweis: Berechnen Sie die Gruppenwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

Gruppe	Anzahl
$0 \leq x \leq 1$	34
$1 \leq x \leq 2$	29
$2 \leq x \leq 4$	32
$4 \leq x \leq 6$	17
$6 \leq x$	10

(a) Berechnen Sie die Testgröße T und das Quantil q, mit dem T verglichen wird ($\alpha = 0.05$).

➽ $T, q = ?$

(b) Muss die Hypothese abgelehnt werden?

➽ ja/nein?