

Statistische Methoden der  
Datenanalyse  
Beispielsammlung

Übung 3

W. Waltenberger, R. Frühwirth

Institut für Hochenergiephysik  
der Österreichischen Akademie der Wissenschaften  
A-1050 Wien, Nikolsdorfer Gasse 18

Wintersemester 2017/2018

# Übung 3

## Beispiel 3.1

Die Lebensdauer eines elektronischen Bauteils wird als exponentialverteilt angenommen. Wie groß muß die mittlere Lebensdauer  $\tau$  mindestens sein, damit ein Bauteil mit 50% bzw. 99% Wahrscheinlichkeit nach einem Jahr noch funktioniert?

## Beispiel 3.2

Die Lebensdauer eines elektrischen Bauteils ist exponentialverteilt mit dem Mittel  $\tau$ . Sie schalten  $N$  gleichartige Bauteile gleichzeitig ein. Wie ist die Wartezeit bis zum ersten Ausfall verteilt? Was ist ihr Mittelwert? Wie ist die Wartezeit bis zum letzten Ausfall verteilt?

## Beispiel 3.3

Eine Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  vom Umfang  $n = 250$  stammt aus einer Exponentialverteilung  $\text{Ex}(\tau)$ . Es ist  $s = \sum x_i = 395.24$ .

- Berechnen Sie den ML-Schätzer  $\hat{\tau}$  von Mittelwert  $\tau$  der Exponentialverteilung.
- Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer  $\hat{\tau}$  effizient ist.
- Berechnen Sie näherungsweise den Standardfehler des ML-Schätzers  $\hat{\tau}$ .
- Berechnen Sie 95%-ige Konfidenzintervalle für  $\tau$  (symmetrisch, linksseitig, rechtsseitig).

## Beispiel 3.4

Eine Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  vom Umfang  $n = 250$  stammt aus einer Exponentialverteilung  $\text{Ex}(1/\lambda)$ . Es ist  $s = \sum x_i = 395.24$ .

- Berechnen Sie den ML-Schätzer  $\hat{\lambda}$  von  $\lambda$ .
- Berechnen Sie näherungsweise den Standardfehler des ML-Schätzers  $\hat{\lambda}$ .
- Berechnen Sie 95%-ige Konfidenzintervalle für  $\lambda$  (symmetrisch, linksseitig, rechtsseitig).

### Beispiel 3.5

Die Exponentialverteilung kann mit der mittleren Lebensdauer  $\tau$  oder mit der mittleren Ereignisrate  $\lambda = 1/\tau$  parametrisiert werden.

- a) Bestimmen Sie Jeffrey's prior für die Exponentialverteilung in beiden Parametrisierungen.
- b) Berechnen Sie die a-posteriori-Verteilung von  $\lambda$ , den Bayes-Schätzer und das symmetrische 95%-ige Vertrauensintervall mit Jeffrey's prior und den Daten aus dem vorigen Beispiel.

### Beispiel 3.6 (Prog)

Simulieren Sie 5000 Stichproben vom Umfang  $n = 100$  aus der Exponentialverteilung  $\text{Ex}(\tau)$ , wobei  $\tau$  zufällig aus einer a-priori-Gammaverteilung mit  $a = 4, b = 1$  gezogen wird. Ermitteln Sie für jede Stichprobe die a-posteriori-Dichte von  $\tau$ , den Bayes-Schätzer und das 95%-ige symmetrische Vertrauensintervall. Zählen Sie, wie oft der gezogene Wert von  $\tau$  im Vertrauensintervall liegt.

### Beispiel 3.7 (Prog)

Simulieren Sie 5000 Stichproben vom Umfang  $n = 50$  aus der bei  $a = 1$  und  $b = 9$  abgeschnittenen Exponentialverteilung  $\text{Ex}(\tau)$  mit  $\tau = 3$ . Schätzen Sie für jede Stichprobe  $\tau$  mit der Maximum-Likelihood-Methode. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der geschätzten Werte und stellen Sie ihre Verteilung in einem Histogramm dar. Untersuchen Sie, ob der ML-Schätzer erwartungstreu ist.