Statistische Methoden der Datenanalyse
Beispielsammlung

Übung 4

W. Waltenberger, R. Frühwirth

Institut für Hochenergiephysik
der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
A-1050 Wien, Nikolsdorfer Gasse 18

Wintersemester 2017/2018

Übung 4

Beispiel 4.1

Sie messen den inversen Impuls $q = 1/p$ eines Teilchens mit einem relativen Fehler von 10%. Berechnen Sie mit linearer Fehlerfortpflanzung den relativen Fehler des Impulses p.

Beispiel 4.2

Es sei X gammaverteilt gemäß $\mathrm{Ga}(a, b), a > 2$ und $Y = 1/X$. Bestimmen Sie die Dichte, den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von $Y = 1/X$. Vergleichen Sie die exakten Werte von μ und σ^2 mit jenen, die aus linearer Fehlerfortpflanzung folgen.

Beispiel 4.3

Eine unbekannte Größe μ wird n-mal unabhängig mit verschiedener, jedoch bekannter Genauigkeit ohne systematischen Fehler gemessen. Jede Messung x_i stammt daher aus einer Verteilung mit Mittel μ und Varianz $\sigma_i^2, i = 1, \ldots, n$. Die Größe μ wird durch ein *gewichtetes Mittel* der Form

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

geschätzt.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_i so, dass der Schätzer $\hat{\mu}$ unverzerrt ist und unter allen Schätzern dieser Form die kleinstmögliche Varianz hat.

b) Zeigen Sie, dass dieser Schätzer identisch mit dem ML-Schätzer ist, wenn die Beobachtungen normalverteilt sind.

Beispiel 4.4

Eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ vom Umfang $n = 500$ stammt aus der *Laplaceverteilung* mit der Dichte $f(x) = 0.5 * \exp(-|x - \mu|),\ x \in \mathbb{R}$ mit unbekanntem Parameter μ.

a) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der Verteilung.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Stichprobenmittels $\bar{x}$.

c) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{\mu}$ von μ und seine ungefähre Varianz.

d) Vergleichen Sie die Varianzen der beiden Schätzer.

Beispiel 4.5

Eine Exponentialverteilung mit Mittel τ ist mit einem im Intervall $[0,\delta]$ gleichverteilten Fehler zu falten. Wie sieht die gefaltete Verteilung aus? Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung für $\tau = 1$ und $\delta = 2$.

Beispiel 4.6 (Prog)

Simulieren Sie N=5000 Stichproben vom Umfang $n = 250$ aus der Mischung von Normalverteilungen mit der Dichte

$$f(x|\mu) = p \cdot \varphi(x|\mu, \sigma_1^2) + (1-p) \cdot \varphi(x|\mu, \sigma_2^2), \;\; \mu = 0, p = 0.7, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 10.$$

Berechnen Sie für jede Stichprobe die ML-Schätzer von μ und p durch numerische Maximierung der Log-Likelihoodfunktion und analysieren Sie die Verteilungen der Schätzwerte. Stellen Sie die Log-Likelihoodfunktion einer Stichprobe graphisch dar.