

Statistische Methoden der  
Datenanalyse  
Beispielsammlung

Übung 6

W. Waltenberger, R. Frühwirth

Institut für Hochenergiephysik  
der Österreichischen Akademie der Wissenschaften  
A-1050 Wien, Nikolsdorfer Gasse 18

Wintersemester 2017/2018

# Übung 6

## Beispiel 6.1

Es sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine zufällige Stichprobe aus  $\text{Norm}(\mu, \sigma^2)$ , mit unbekanntem  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Sie schätzen  $\sigma^2$  durch

$$\Sigma^2 = C \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Bestimmen Sie  $C$  so, dass

- $\Sigma^2$  unverzerrt ist;
- $\Sigma^2$  den minimalen quadratischen Fehler (MSE) hat.

## Beispiel 6.2

Die Laplace-Verteilung  $\text{La}(m, s)$  mit Lageparameter  $m$  und Skalenparameter  $s$  hat die Dichte

$$f(x; m, s) = \frac{1}{2s} \exp\left(-\frac{|x - m|}{s}\right)$$

- Berechnen Sie Erwartung und Varianz der Verteilung.
- Bestimmen sie die ML-Schätzer von  $m$  und  $s$ .

## Beispiel 6.3 (Prog)

- Untersuchen Sie Verzerrung und Varianz der ML-Schätzer aus Beispiel 6.2 mittels Simulation.
- Simulieren Sie eine Stichprobe vom Umfang  $n = 200$  aus  $\text{La}(m, s)$  mit  $m = 1, s = 0.5$ . Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von  $(m, s)$  und ermitteln Sie eine näherungsweise Kovarianzmatrix aus der Log-Likelihoodfunktion.

**Beispiel 6.4 (Prog)**

Schätzen Sie den Parameter  $a$  einer Gammaverteilung

$$f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)}, \quad x \geq 0$$

mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus einer simulierten Stichprobe vom Umfang 500 ( $a=2$ ). Bestimmen Sie den Standardfehler der Schätzung durch 5000-malige Wiederholung der Stichprobe. Vergleichen Sie den so erhaltenen Wert mit dem aus einer individuellen Zielfunktion bestimmten Wert.