Repetitorium 2 – Lösungen der Übungsbeispiele

- Ein Proton und ein Elektron befinden sich in einem Abstand von 1m. Berechne die Anziehungskräfte aufgrund der a) Elektrostatik und der b) Gravitation. Diskutiere das Ergebnis.

a) Das Coulombsche Gesetz lautet in skalarer Form

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

q1, q2 Die Ladungen von Proton und Elektron sind gleich $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As.
ε_0 Permittivität (veraltet Dielektrizitätskonstante) des Vakuums = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Einsetzen

$$F = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\ \cdot 3{,}1416 \cdot\ 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} As \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} As}{(1m)^2} = 2{,}3 \cdot 10^{-28}\,\frac{VAs}{m}$$

Umrechnen der elektrischen Einheiten auf mechanische Einheiten: 1VAs = 1Nm

$$F = 2{,}3 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{N}$$

b) Die Anziehungskraft berechnet sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz in skalarer Form zu

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\ \cdot \frac{\mathrm{m_1} \cdot\ \mathrm{m_2}}{\mathrm{r}^2}$$

Der Wert der Gravitationskonstanten G beträgt $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $m^3/(kg \cdot s^2)$
Die Ruhemasse des Protons beträgt $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.
Die Ruhemasse des Elektrons beträgt $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

Die Anziehungskraft ist daher konkret

$$\mathrm{F} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{1{,}67\ \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot\ 9{,}11\ \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{(1\mathrm{m})^2}$$

$$\mathrm{F} = 1{,}0 \cdot 10^{-67}\,\frac{\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-67}\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-67}\mathrm{N}$$

Schlussfolgerung: Unter diesen Bedingungen ist die elektrostatische Kraft um $2.3 \cdot 10^{39}$ höher als die Gravitationskraft! Allein der Unterschied der Proportionalitätsfaktoren $G \cdot 4\pi\varepsilon_0$ macht schon 20 Dekaden aus!

- Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $1mm^2$ fließen $6 \cdot 10^{20}$ Elektronen pro Sekunde. Berechne die Stromstärke. Welche der Angaben sind irrelevant?

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot e}{t} = \frac{6 \cdot 10^{20} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} As}{1s} = 100A$$

Die Angaben Kupferdraht und Querschnitt $1mm^2$ sind für dieses Beispiel irrelevant.

- Zwei sehr dünne im Abstand von 1mm parallel montierte elektrische Leiter der Länge 10m werden von jeweils einem Strom von 100 Ampere durchflossen, Berechne die Kraft, die die beiden Leiter aufeinander ausüben.

Vereinfacht skalar, im Vakuum oder in Luft und isotrop:

I Strom durch die beiden Leiter [A]
r Abstand der beiden Leiter voneinander [m]
l Länge der beiden Leiter (jeweils) [m]
F Kraft der beiden Leiter aufeinander [N]
B Magnetische Induktion [Vs/m^2] bzw. [N/Am]
H Magnetische Feldstärke [A/m]
μ_0 Permeabilität des Vakuums [Vs/Am]

1) Die Lorentzkraft auf einen von einem Strom I_1 durchflossenen Leiter der Länge l in einem Magnetfeld der magnetischen Induktion B errechnet sich zu

$$F = B \cdot I_1 \cdot l \qquad [N] = \left[\frac{N}{Am}\right] \cdot [A] \cdot [m]$$

2) Die magnetische Feldstärke H im Abstand r um einen von einem Strom I_2 durchflossenen Leiter errechnet sich zu

$$H = \frac{I_2}{2\,\pi\, r} \qquad \left[\frac{A}{m}\right]$$

3) Daraus resultiert in Luft oder im Vakuum die magnetische Induktion (wegen der an dieser Stelle gerne bemühten Feldlinien auch magnetische Flussdichte genannt)

$$B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I_2}{2\,\pi\, r} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am}\right] \cdot I_2\,[A]}{r\,[m]} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2}{r} \left[\frac{Vs}{m^2}\right] = [T]$$

4) Nun wirkt das durch den Stromfluss I_2 in Leiter 2 erzeugte Magnetfeld auf den vom Strom I_1 durchflossenen Leiter 1 auf der Länge l

$$F = B \cdot I_1 \cdot l = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2}{r} \cdot I_1 \cdot l = \frac{2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am}\right] \cdot I_1\,[A] \cdot I_2\,[A] \cdot l\,[m]}{r\,[m]}$$

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r} \left[\frac{VA\,s}{m}\right] = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r} \left[\frac{Nm}{m}\right] = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r} [N]$$

Konkrete Werte einsetzen

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10}{10^{-3}} N = 20N$$

- Eine Silbernitratlösung wird eine Stunde lange von einem Strom von 100A durchflossen. Berechne die Masse des abgeschiedenen Silbers.

M	molare Masse des abgeschiedenen Stoffes
m	Masse des abgeschiedenen Stoffes
z	Wertigkeit des Ions, das abzuscheiden ist
F	Faraday – Konstante (96485 As/mol)
N_A	Avogadro – Konstante ($6{,}022 \cdot 10^{23}$ /mol)
e	Elementarladung ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As)
Q	Zur Abscheidung wirksame Ladungsmenge (As) = Abscheidestrom[A] x Abscheidezeit[s]

Das Gesetz von Faraday lautet in heutiger Schreibweise

$$m = \frac{M \cdot Q}{z \cdot F} = \frac{M \cdot I \cdot t}{z \cdot e \cdot N_A}$$

Einsetzen

$$m = \frac{M \cdot I \cdot t}{z \cdot e \cdot N_A} = \frac{107{,}87\ \frac{g}{mol} \cdot 100\text{A} \cdot 3600s}{1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} As \cdot \frac{6{,}022\ \cdot\ 10^{23}}{\text{mol}}} = \frac{107{,}87\ g \cdot 100 \cdot 3600}{1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}022\ \cdot\ 10^{23}} = 403g$$

- Schlage in einer geeigneten Tabelle den spezifischen Widerstand von reinem Aluminium nach. Welche andere ganz grundlegende physikalische Eigenschaft des Aluminiums könnte der Grund sein, dieses Metall trotz seines höheren spezifischen Widerstandes statt Kupfer als Leitmetall, beispielweise in Hochspannungs – Freileitungen zu verwenden?

  Spezifischer Widerstand (Al) $= 26{,}4\ \text{m}\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$
  Spezifischer Widerstand (Cu) $= 17{,}8\ \text{m}\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$

  Dichte (Al) $= 2{,}7\ \text{g/cm}^3$
  Dichte (Cu) $= 8{,}9\ \text{g/cm}^3$

- Gib die Bewegungsgleichungen der folgenden Bewegungen als Funktion der Zeit an:
  Bestimme zu diesen Beispielen die geleistete Arbeit, sowohl durch Überlegen als auch mittels Linienintegral.

  - Eine Katze der Masse m läuft geradlinig, parallel zur x – Achse mit konstanter Geschwindigkeit v. Zu Beginn des Versuchs befindet sie sich am Punkt (0,b,0).

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überlegung: Da die Bewegung horizontal erfolgt, also auf einer Äquipotentialfläche, ist die Arbeit 0.

$$W = \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F(s(t))} \cdot \frac{d\overrightarrow{s(t)}}{dt} \cdot dt = \int_{0}^{T} (0{,}0, m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{(0, \text{b} + \text{t} \cdot \text{v}, 0)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_0^T (0{,}0, m \cdot g) \cdot (0, \mathrm{v}, 0) \cdot dt = \int_0^T 0 \cdot dt = 0$$

- Eine Bergdohle der Masse m fliegt einen Kreis mit einem Radius r in der y – z – Ebene. Kreismittelpunkt ist (0,0,c). Sie fliegt eine vollständige Runde und benötigt dazu u Sekunden.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi t}{u}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{u}\right) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq u$$

Überlegung: Da die Bewegung entlang einer geschlossenen Kurve erfolgt, ist die Arbeit 0.

$$W = \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F(s(t))} \cdot \frac{d\overrightarrow{s(t)}}{dt} \cdot dt = \int_0^u (0{,}0, m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{\left(0, \cos\left(\frac{2\pi t}{u}\right), \mathrm{c} + \sin\left(\frac{2\pi t}{u}\right)\right)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_0^u (0{,}0, m \cdot g) \cdot \left(0, \left(\frac{2\pi}{u}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{2\pi t}{u}\right)\right), \left(\frac{2\pi}{u}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{u}\right)\right) \cdot dt$$

$$W = \int_0^u \left(m \cdot g \cdot \left(\frac{2\pi}{u}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{u}\right)\right) \cdot dt$$

$$W = m \cdot g \cdot \left(\frac{2\pi}{u}\right) \cdot \int_0^u \left(\cos\left(\frac{2\pi t}{u}\right)\right) \cdot dt$$

$$W = m \cdot g \cdot \left(\frac{2\pi}{u}\right) \cdot \left(\frac{u}{2\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{u}\right) \Big|_0^u$$

$$W = m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{u}\right) \Big|_0^u$$

$$W = m \cdot g \cdot \left[\sin\left(\frac{2\pi u}{u}\right) - \sin\left(\frac{2\pi 0}{u}\right)\right] = 0$$

- Ein Stein der Masse m fällt von der Erdoberfläche beginnend mit dem Punkt (0,0,0) in ein Loch der Tiefe h.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{2} \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Überlegung: Die Masse fällt in z – Richtung, daher kann man die freigesetzte Arbeit skalar berechnen: $\mathrm{W} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h}$, wegen negativem h ist die Arbeit auch negativ.

$$W = \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F(s(t))} \cdot \frac{d\overrightarrow{s(t)}}{dt} \cdot dt = \int_{0}^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} (0,0,m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{\left(0,0,-\frac{g \cdot t^2}{2}\right)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_{0}^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} (0,0,m \cdot g) \cdot (0,0,-g \cdot t) \cdot dt$$

$$W = \int_{0}^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} (-m \cdot g^2 \cdot t) \cdot dt = (-m \cdot g^2) \cdot \int_{0}^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} t \cdot dt = (-m \cdot g^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{0}^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$W = (-m \cdot g^2) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = (-m \cdot g^2) \cdot \left(\frac{\frac{2h}{g}}{2} \right) = (-m \cdot g^2) \cdot \left(\frac{h}{g} \right) = -m \cdot g \cdot h$$

- Gerlinde Kaltenbrunner (Masse m) steigt in der Zeit u auf einen kegelförmigen Berg. Der Radius des Basiskreises beträgt r, die Höhe des Kegels h. In jeder Zeitperiode t macht sie eine Umrundung.

  Das schwierigste an diesem Beispiel ist die Aufstellung der Bewegungsgleichung. Wir führen dies daher schrittweise durch:

  1) Die allgemeine Bewegungsgleichung entlang eines Zylindermantels mit Radius r und der Höhe 1 lautet

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\ (2\pi t) \\ r \cdot \sin\ (2\pi t) \\ t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

  2) Um einen Kegel zu generieren, muss der Radius mit der Höhe linear abnehmen

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot (1-t) \cdot \cos\ (2\pi t) \\ r \cdot (1-t) \cdot \sin\ (2\pi t) \\ t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

  3) Der Kegel soll die Höhe h haben und nicht 1

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot (1-t) \cdot \cos\ (2\pi t) \\ r \cdot (1-t) \cdot \sin\ (2\pi t) \\ t \cdot h \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

  4) Der Aufstieg dauert nicht 1 Sekunde, sondern u Sekunden lang

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \cos\ (2\pi t) \\ r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \sin\ (2\pi t) \\ \frac{t \cdot h}{u} \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq u$$

Überlegung: Die Masse wird in z – Richtung gehoben, daher gilt: W = m · g · h, wegen positivem h ist die Arbeit auch positiv. Die anderen Bewegungsrichtungen bleiben ohne Bedeutung.

$$W = \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F(s(t))} \cdot \frac{d\overrightarrow{s(t)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_{0}^{u} (0{,}0, m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{\left(r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \cos\ (2\pi t), r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \sin\ (2\pi t), \frac{t \cdot h}{u}\right)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_{0}^{u} (0{,}0, m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{\left(r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \cos\ (2\pi t), r \cdot (1 - \frac{t}{u}) \cdot \sin\ (2\pi t), \frac{t \cdot h}{u}\right)}}{dt} \cdot dt$$

Die aufwändigen Ableitungen der Komponenten x und y können wir uns schenken, da sie bei der Skalarmultiplikation sowieso wegfallen.

$$W = \int_{0}^{u} m \cdot g \cdot \frac{h}{u} \cdot dt = \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{u}\right) \cdot t\,|_0^u = \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{u}\right) \cdot u$$

$$W = m \cdot g \cdot h$$

- Eine Katze läuft senkrecht einen Baum der Höhe h hinauf und benötigt dazu u Sekunden.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{u} \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq u$$

Die Masse wird in z – Richtung gehoben, daher gilt: W = m · g · h, wegen positivem h ist die Arbeit auch positiv. Die anderen Bewegungsrichtungen bleiben ohne Bedeutung.

$$W = \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F(s(t))} \cdot \frac{d\overrightarrow{s(t)}}{dt} \cdot dt = \int_{0}^{u} (0{,}0, m \cdot g) \cdot \frac{d\overrightarrow{\left(0{,}0, t \cdot \frac{h}{u}\right)}}{dt} \cdot dt$$

$$W = \int_{0}^{u} (0{,}0, m \cdot g) \cdot \left(0{,}0, \frac{h}{u}\right) \cdot dt = \int_{0}^{u} \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{u}\right) \cdot dt = \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{u}\right) \cdot t\,|_0^u = \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{u}\right) \cdot u$$

$$W = m \cdot g \cdot h$$

- Es gibt ein elektrostatisches Feld. Im Abstand r1 vom Kraftzentrum befindet sich eine Konduktorkugel, auf der sich $6 \cdot 10^{18}$ Elektronen befinden. Dann wird diese Konduktorkugel losgelassen und bewegt sich von selbst auf den größeren Abstand r2. Dabei leistet sie eine Arbeit von w Joule. Gib die elektrische Spannung zwischen r1 und r2 an. Welche Polarität hat das Kraftzentrum?

  Im elektrostatischen Feld gilt:

$$W = Q \cdot U$$

  Und daher

$$U = \frac{W}{Q}$$

  Die Ladung auf der Konduktorkugel beträgt

$$Q = n \cdot e = 6 \cdot 10^{18} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} As = 1As$$

  Die elektrische Spannung zwischen r1 und r2 beträgt daher

$$U = \frac{W}{Q} = \frac{w\,Ws}{1As} = \frac{w\,V\,A\,s}{1\,A\,s} = w\,V$$

  Da sich die Konduktorkugel von selbst vom Kraftzentrum wegbewegt, muss eine abstoßende Kraft wirken. Das Kraftzentrum muss daher negativ geladen sein.

- Nenne die Grundgrößen der Elektrotechnik, deren Formelzeichen und Einheit.

Spannung	U	Volt
Strom	I	Ampere
Widerstand	R	Ohm

- Elektrische Spannung: Nenne Definition (nicht über das Ohmsche Gesetz!), Formelzeichen und Einheit.

Definition	Spannung = Arbeit / Ladung
Formelzeichen	U
Einheit	Volt [V]

- Elektrischer Strom: Nenne Definition (nicht über das Ohmsche Gesetz!), Formelzeichen und Einheit.

Definition	Strom = Anzahl der Ladungsträger, die pro Zeiteinheit durch einen elektrischen Leiter fließen
Formelzeichen	I
Einheit	Ampere [A]

- Elektrischer Widerstand: Nenne Definition (nicht über das Ohmsche Gesetz!), Formelzeichen und Einheit.

Definition	Elektrische Eigenschaft von Materialien bezogen auf deren Geometrie.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = spezifischer\ Widerstand \cdot \frac{Länge}{Querschnitt}$$

Formelzeichen	R
Einheit	Ohm [Ω]

- Formuliere das Ohmsche Gesetz.

  R = U / I

- Berechne den Widerstand, wenn bei einem Strom von 3A eine Spannung von 3V abfällt.

  R = U / I R = 3V / 3A = 1Ω

- Berechne den Strom, wenn an einem Widerstand von 5Ω eine Spannung von 10V abfällt.

  I = U / R I = 10V / 5Ω = 2A

- Berechne die Spannung, wenn durch einen Widerstand von 10Ω ein Strom von 5A fließt.

  U = R · I U = 10Ω · 5A = 50V

- Formuliere die Kirchhoffschen Regeln. Auf welchem physikalischen Grundprinzip beruhen diese?

  Knotenregel: Σ I = 0 Maschenregel: Σ U = 0 Energieerhaltungssatz

- An eine Spannungsquelle mit 9V sind zwei in Serie geschaltete Widerstände angeschlossen. Am oberen Widerstand liegen 6V an. Berechne die Spannung am unteren Widerstand. Welches Gesetz verwendest Du zur Berechnung?

  Maschenregel: Σ U = 0 U_{R2} = 9V – 6V = 3V

- In einen Stromknoten mit drei Leitungen fließen aus einer Leitung 2A hinein und aus einer anderen Leitung 3A hinein. Was geschieht in der dritten Leitung? Welches Gesetz verwendest Du zur Berechnung?

  Knotenregel: Σ I = 0 I_3 = 2A + 3A = 5A hinaus

- Eine ideale elektrische Maschine zieht an der Erdoberfläche eine Masse von 100g in einer Sekunde 1m hoch. Berechne die elektrische Leistung dieser Maschine. Sie werde mit einer Spannung von 10V betrieben. Berechne die Stromaufnahme während der Aktivität.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{100\text{g} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1\text{m}}{1s} = 1\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s^3} = 1\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s^3} = 1W$$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1W}{10\text{V}} = 0{,}1A$$