1 Aufgabe UE-I.1

1.1 Aufgabe UE-I.1.1

Schreiben Sie eine Funktion [w] = perco(X,t,maxEpoches), welche den Gewichtsvektor w eines Perceptrons für das Trainingsset (X, y) mittels des im Skriptum beschriebenen online-Verfahrens bestimmt. Das Trainingsset soll dabei wie im Skriptum beschrieben aufgebaut sein (i-te Spalte enhält i-tes Muster X(:,i) bzw. Target (Klassenlabel) y(i), +1/-1 - Kodierung der Targets). In maxEpoches soll zusätzlich die maximale Anzahl der Epochen übergeben werden können.

a) Wenden Sie das Verfahren auf folgende Probleme an: OR, AND, XOR. Vergessen Sie nicht, Ihre Trainingsvektoren in homogenen Koordinaten zu übergeben.

b) Trainieren Sie Ihr Perceptron auf den Inputvektoren in der Datei *perceptrondata* mit den Targets (Klassen-Labels) *perceptrontarget1* und *perceptrontarget2*. Plotten Sie außerdem die Klassenaufteilung der Trainingspunkte für beide Mengen von Klassen-Labels.

   Hinweise:

   - Die Targets und Features sind zeilenweise gespeichert, die Features sind 2-dimensional. Die Datein können z.B. in Python mit der numpy-Funktion *loadtxt* oder in MATLAB mit der Funktion *dlmread* geladen werden.
   - Die Targets sind 0/1-codiert; um jedoch ihr in UE-I.1.1 entwickeltes Verfahren verwenden zu können, müssen Sie die Targets zunächst in -1/+1-Codierung 'konvertieren'.

2 Aufgabe UE-I.2

Generieren Sie je 1000 Stichproben (*samples*) der Größe 5/30/100/500 für die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2) = N(4, 3)$. Hierzu steht unter MATLAB die Funktion *normrnd* und unter Python die Funktion *numpy.random.normal* zu Verfügung. Beachten Sie jedoch, daß diese Funktionen die Standardabweichung σ und nicht die Varianz σ^2 als Argument erwarten.

Wie verteilen sich nun für jede der 4 Stichprobengrößen die 1000 geschätzten Mittelwerte?

a) Stellen Sie deren Verteilung in Histogrammform dar (Funktion *hist* unter MATLAB bzw. *numpy.histogram* unter Python), berechnen Sie das empirische Mittel sowie die empirische Varianz.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den theoretischen Resultaten bzg. der Verteilung des Mittelwerts.

Hinweise:

- Mittelwert und Varianz einer Zahlenfolge können sowohl unter MATLAB als auch unter numpy mittels *mean* bzw. *var* berechnet werden.

3 Aufgabe UE-I.3

Gegeben seien Temperaturmessungen für 3 Tage:

- Mo: $[3, 3, 3]$
- Di: $[8, 7, 10, 9, 8]$
- Mi: $[4, 7, 9, 7]$

Berechnen Sie die Tages- und das Gesamtmittel.

a) Überprüfen Sie, ob sich im gegebenen Fall der Gesamtmittelwert durch Mittelung der Tagesmittelwerte berechnen läßt.

b) Nehmen Sie an, daß montags ausschließlich der Wert 3 gemessen wird. Wie viele Messungen müssen mindestens in der Montagsgruppe liegen, damit das Gesamtmittel kleiner als 3.4 wird? (Anmerkung: die Di- and Mi-Gruppe sollen in diesem Beispiel nicht verändert werden, ausschließlich zur Mo-Gruppe können weitere Beobachtungen hinzugefügt werden).

c) Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen im allgemeinen Fall das Mittel der Gruppenmittel dem Gesamtmittel entspricht.

4 Aufgabe UE-I.4

Sei $\mathbf{f}(x, y) = (1, x, y, x^2, y^2)^T$ eine Abbildung (Merkmalstransformation), welche die Ebenen-Koordinaten um eine homogene Dimension und zwei nichtlineare Funktionen der ursprünglichen Merkmale erweitert. (Die Bilder von $\mathbf{f}$ werden oft als *Basisfunktionen* bezeichnet. Im vorliegenden Fall sind die Basisfunktionen also Monome der urprünglichen Größen).

a) Bestimmen Sie ausgehend von der Kreisgleichung $K(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r = 0$ den Gewichtsvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$, für welchen

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{f}(x,y) &= w_0 1 + w_1 x + w_2 y + w_3 x^2 + w_4 y^2 \\ & \begin{cases} > 0, \text{ falls (x,y) liegt außerhalb des Kreises} \\ < 0, \text{ falls (x,y) liegt innerhalb des Kreises} \end{cases} \end{aligned}$$

gilt. Obiger Ausdruck stellt somit eine lineare Diskriminantenfunktion auf dem durch eine nicht-lineare Transformation erhaltenen Merkmalsvektor $\mathbf{f}$ dar, welche zwischen Punkten inner- und außerhalb eines Kreises unterscheiden kann.

b) Generieren Sie je 100 Punkte außerhalb und innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(x_0 = 4, y_0 = 5)$ und Radius $r = 3.5$. Trainieren Sie Ihr Perceptron aus Aufgabe I, um zwischen diesen beiden Mengen zu unterscheiden. Verifizieren Sie ebenfalls Ihre unter a) gefundene allgemeine Lösung anhand dieser Daten.