1 Aufgabe UE-II.1

a) Verifizieren Sie die Lösung von Aufgabe T-1 (erstes Theorie-Beispiel, siehe Home-Page) für die beiden normalverteilten Zufallsvariablen X_1, X_2 mit $\mu_1 = -7, \sigma_1^2 = 30$ und $\mu_2 = 4, \sigma_2^2 = 13$, indem Sie die Fläche unter den jeweiligen Dichtefunktionen bis bzw. ab x^* berechnen (MATLAB-Funktion *normcdf*).

b) Bestimmen Sie x^* außerdem näherungsweise grafisch durch Plotten der cdfs.

c) Ändert sich die Lösung x^*, wenn man in Aufgabe T-1 p_1 und p_2 vertauscht, d.h. wenn $P(X_2 \leq x^*) = 1 - P(X_1 \leq x^*)$ gelten soll (Begründung)?

2 Aufgabe UE-II.2

Fassen Sie die Normalverteilungen in Aufgabe UE-II.1 als *class conditional pdf*s $p(x|\omega_i)$ der Klassen ω_1 umd ω_2 mit *priors* $P(\omega_1) = 0.3$ und $P(\omega_2) = 0.7$ auf.

a) Schreiben Sie Funktionen zur Berechnung der $p(x|\omega_i)$, der Randverteilung $p(x)$ (evidence) des Merkmals sowie der *posteriors*.

b) Klassieren Sie anhand der folgenden Merkmalsausprägungen unter Verwendung der *Bayes decision rule*: $-15, -10, -5, 0, 5, 10$

c) Ermitteln Sie grafisch (durch Plotten der *posteriors*) die Entscheidungsgrenze.

3 Aufgabe UE-II.3

Gegeben seien zwei Klassen ω_1, ω_2 mit normalverteilten Merkmalen $X_1 \sim N(4, 1), X_2 \sim N(6, 1)$. Berechnen Sie jeweils für $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0.5$ sowie für $P(\omega_1) = 0.9, P(\omega_2) = 0.1$

a) die Fehlerrate (*error rate*) für die Entscheidungsgrenze $x^* = 4$, sowie

b) die *Bayes error rate* (und Entscheidungsgrenze).

c) Plotten Sie außerdem den *conditional error*.

Hinweis: ermitteln Sie die Entscheidungsgrenzen bzw. Entscheidungsregionen wiederum grafisch.

4 Aufgabe UE-II.4

Gegeben seien zwei Klassen ω_1, ω_2 mit normalverteilten Merkmalen $X_1 \sim N(4,1), X_2 \sim N(6,1)$, sowie für folgende *loss*-Funktion:

$$\lambda_{12} = 5, \lambda_{21} = 1, \lambda_{11} = \lambda_{22} = 0.$$

Berechnen Sie jeweils für $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0.5$ sowie $P(\omega_1) = 0.9, P(\omega_2) = 0.1$

a) das *total risk* für die Entscheidungsgrenze $x^* = 4$, sowie

b) das *minimum total risk* (und Entscheidungsgrenze).

c) Plotten Sie außerdem das *conditional risk*.

d) Wie ändern sich die Ergebnisse für *0/1-loss* (Begründung!).

Hinweis: ermitteln Sie die Entscheidungsgrenzen bzw. Entscheidungsregionen wiederum grafisch.

5 Aufgabe UE-II.5

Die **Bernoulli-Verteilung** $B(1,\theta)$ mit Parameter $0 \leq \theta \leq 1$ beschreibt einen Zufallsversuch, der nur zwei mögliche Ausfälle haben kann (z.B. Münzwurf). Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable $X \sim B(1,\theta)$ gilt:

$$P(X=1) = \theta, P(X=0) = 1-\theta, \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[X] &= \theta \quad (2) \\ Var[X] &= \theta(1-\theta). \quad (3) \end{aligned}$$

Die Summe $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Bi(N,\theta)$ von N iid Bernoulli-Variablen X_i ist **binomial-verteilt**:

$$P(Z=n) = \binom{N}{n} \theta^n (1-\theta)^{(N-n)} \tag{4}$$

a) Leiten Sie – unter Verwendung der bekannten Eigenschaften des Erwartungswertes und der Varianz der Summe von iid Zufallsvariablen – den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung her.

b) Zeigen Sie daß der relative Anteil Z/N der "guten" Ausfälle ein erwartungstreuer, asymptotisch konsistenter Schätzer des Parameters θ ist.