UE Logik für Wissensrepräsentation
Aufgabenblatt 1: Aussagenlogik

Beispiel 1:
Beweise das Replacement-Theorem, welches folgende Eigenschaft darstellt:

> Sei C_A eine Formel die A als Teilformel enthält, und sei C_B das Resultat indem A durch B in C_A ersetzt wird. Dann gilt: Falls $\models A \equiv B$, dann $\models C_A \equiv C_B$.

Beispiel 2:
Zeige die syntaktische Form der Schnittregel, d.h. die Eigenschaft

> falls $T \vdash A_i$, für $1 \leq i \leq n$, und $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $T \vdash B$, für eine beliebige Theorie T und beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n, B$,

direkt aus der Definition der Herleitungsrelation $\vdash$.

Beispiel 3:
Beweise die Korrektheit des in der VO vorgestellten Hilbertkalküls für die Aussagenlogik.

Beispiel 4:
Zeige mittels Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Herleitungsrelation der Aussagenlogik folgende Relationen:

(a) $\vdash A \vee \neg A$.

(b) $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \supset \neg(A \vee B)$.

(c) $(V \supset \ddot{U}), (K \supset F), (\neg\ddot{U} \vee \neg F) \vdash (\neg V \vee \neg K)$.

(d) $(J \vee S) \supset ((\neg A \wedge \neg(T \wedge D)) \vee (V \wedge H)) \vdash (S \wedge \neg V) \supset \neg A$.

Beispiel 5:
Beweise, daß der deduktive Abschlußoperator der Aussagenlogik die Eigenschaften der Inflationierung, Idempotenz, und Monotonie erfüllt.

Beispiel 6:
Welche der folgenden Eigenschaften gelten und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten (d.h., beweisen Sie die geltenden Eigenschaften und geben Sie ein Gegenbeispiel für die falschen)! "$\nvdash A$" bedeutet wie üblich "nicht $\vdash A$".

(a) "Für jede Formel A, falls $\vdash \neg A$, dann $\nvdash A$."

(b) "Für jede Formel A, falls $\nvdash A$, dann $\vdash \neg A$."

(c) "Für alle Formeln A, B, falls $\vdash A \vee B$, dann $\vdash A$ oder $\vdash B$."

(d) “Für alle Formeln A, B, falls $\vdash A$ oder $\vdash B$, dann $\vdash A \vee B$.”

Beispiel 7: Zeige die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

(i) $B \vdash C$.

(ii) Für jede Liste $A_1, \ldots, A_n$ von Formeln,

wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash C$.

Beispiel 8:

(a) Übersetzen Sie folgenden Satz in Aussagenlogik. Wie würden Sie den Satz umändern um Zweideutigkeiten zu vermeiden?

> Falls Commodore Schmidlapp anwesend ist [S] oder der Chef des Generalstabs unseren Vorschlag annimmt [C] und der Verteidigungsminister nichts dagegen hat [$\neg V$], wird unser Vorschlag angenommen [A].

(b) Analysieren Sie folgendes Argument mittels Aussagenlogik. Ist es stichhaltig? Begründen Sie Ihre Antwort!

> Der geplante Angriff wird nur dann erfolgreich sein, wenn der Gegner überrascht wird oder die Stellung schwach verteidigt wird. Der Gegner wird nicht überrascht werden außer er ist siegessicher. Er wird allerdings nicht siegessicher sein falls die Stellung schwach verteidigt wird. Also wird der Angriff nicht erfolgreich sein.

Beispiel 9: (Keisler.)
Brown, Jones und Smith werden der Steuerhinterziehung verdächtigt. Sie machen folgende Aussagen unter Eid:

BROWN: Jones ist schuldig und Smith ist unschuldig.

JONES: Falls Brown schuldig ist, dann ist es auch Smith.

SMITH: Ich bin unschuldig aber mindestens einer der anderen ist schuldig.

Seien B, J, S Atomformeln die jeweils für “Brown ist unschuldig”, “Jones ist unschuldig” und “Smith ist unschuldig” stehen.

Repräsentieren Sie die Aussagen der drei Verdächtigten als Formeln der Aussagenlogik. Beantworten Sie folgende Fragen mittels entsprechender Repräsentation in Aussagenlogik:

(i) Sind die Aussagen der drei konsistent?

(ii) Die Aussage eines Verdächtigten folgt aus der Aussage eines anderen. Welche aus welcher?

(iii) Angenommen jeder ist unschuldig, wer beging eine falsche Zeugenaussage?

(iv) Angenommen die Aussagen jedes Zeugen sind wahr, wer ist schuldig und wer unschuldig?

(v) Angenommen die Unschuldigen sagen die Wahrheit und die Schuldigen lügen, wer ist unschuldig und wer schuldig?

Hinweis: verwenden Sie Wahrheitstafeln der involvierten Formeln zur Beantwortung der Fragen.