Argumentieren und Beweisen

VU 184.765

Uwe Egly   Antonius Weinzierl

Sommersemester 2016

Ziele

- Fachliche und methodische Kenntnisse: Vertrautheit mit den wesentlichen mathematischen Definitionen, Schlussweisen und Beweistechniken.
- Kognitive und praktische Fertigkeiten: Vertiefte Kenntnisse in Methoden zur Erstellung und Strukturierung von Beweisen, Fertigkeit zur Erstellung auch komplexer Beweise.
- Soziale Kompetenz, Innovationskompetenz und Kreativitaet: Kommunikation der Beweisideen und Beweise, Erstellen und strukturieren von Beweisen fuer diverse Problemstellungen, kreative Erstellung von Hypothesen bei Induktionsbeweisen.

Kursübersicht

- Inhalt: Beweisen mathematischer Aussagen (Details siehe TISS)
  - Heute, Kapitel 0: Wiederholung,
    wie lese ich eine Definition, eine Formel, etc.
  - Nächstes Mal: Vorlesungsstoff.
- Sprache: Vortrag deutsch,
  Material englisch nach Kapitel 0.

Termine

- Dienstags von 17:00 – 19:00 Uhr,
  am 15.3., 5.4., 12.4, 19.4., Seminarraum von Neumann.
- Donnerstags von 17:30 – 19:30 Uhr (s.t.), EI 10
- Nächster Vorlesungstermin: 15.3.
- Erster Übungstermin: 7.4.

Evaluierung

- *Übungsblätter*: Lösung von Aufgaben inkl. schriftlicher Dokumentation.
- Thema: Hauptsächlich Beweise.
- Gegenseitige *Reviews* der Abgaben.
- Bewertung anhand der Qualität der eigenen Abgabe und der Qualität des abgegebenen Reviews (für die Lösung einer anderen Person).
- *Tafelrechnung* in den Übungen inkl. Erläuterung des theoretischen Hintergrunds.

Kapitel 0

- Ziel: Mathematische Definitionen lesen und verstehen können.
- Inhalt: Mengen, Tupel, Variablen und Geltungsbereiche,
  Relationen, Prädikate, Funktionen, Formeln,
  häufige “Redewendungen”,
  Syntax und Semantik von Prädikatenlogik.

Deterministische endliche Automaten

Deterministischer endlicher Automat (DEA)

... wird beschrieben durch ein 5-Tupel $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, wobei

- Q ... endliche Menge der Zustände
- Σ ... Eingabealphabet (*input alphabet*)
- $\delta\colon Q \times \Sigma \mapsto Q$ ... Übergangsfunktion (total) (*transition function*)
- $q_0 \in Q$ ... Anfangszustand (*initial state*)
- $F \subseteq Q$ ... Menge der Endzustände (*final states*)

δ ist eine totale Funktion: Folgezustand $\delta(q, s)$ ist für jeden Zustand $q \in Q$ und jede Eingabe $s \in \Sigma$ eindeutig definiert. $\Longrightarrow$ „deterministisch“

Erweiterte Übergangsfunktion $\delta^*\colon Q \times \Sigma^* \mapsto Q$

$\delta^*(q, \varepsilon) = q, \quad \delta^*(q, sw) = \delta^*(\delta(q, s), w)$ für alle $q \in Q$, $s \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.

Akzeptierte/Generierte Sprache

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F \,\}$

Grundsätzliches

Mathematisches Denken

- Mathematik: “Wenn . . . , dann . . . ”-Aussagen
- Wichtig: Bedingungen, unter denen eine Aussage gilt.

- Mathematik so präzise wie möglich.
- Präzision: Nennung aller Details $\Rightarrow$ viel Text.

- Mathematik drückt viel Text kurz und knapp aus durch spezielle Symbole und Abstraktion.

$\Rightarrow$ Formale Notation, Formeln.

Mathematisches Denken

- Eine formale Definition sagt mehr als viele Worte.
- Jedes Symbol wichtig!

Beispiel (Gruppenaxiome)

Ein Gruppe ist ein Paar $(G, *)$, mit nicht-leerer Menge G und $*$ einer binären Verknüpfung auf G sodass gilt:

$$
\begin{array}{ll}
\forall a, b, c \in G & (a * b) * c = a * (b * c) \\
\exists e \in G\, \forall a \in G & a * e = e * a = a \\
\forall a \in G\, \exists a' \in G & a * a' = e
\end{array}
$$

Mathematisches Denken

- Mathematik: “Wenn . . . , dann . . . ”-Aussagen.
- Alle notwendigen Bedingungen werden genannt.
- Nicht genanntes anzunehmen ist *falsch*!
- Ausnahmen: allgemeine Konventionen (oft von Feld zu Feld unterschiedlich).
- “Gesunder Hausverstand” (common sense) meistens falsch.

Mathematisches Denken

- Mathematik: "Wenn ..., dann ..."-Aussagen.

- Alle notwendigen Bedingungen werden genannt.
- Nicht genanntes anzunehmen ist *falsch*!

- Ausnahmen: allgemeine Konventionen
  (oft von Feld zu Feld unterschiedlich).
- "Gesunder Hausverstand" (common sense) meistens falsch.

Beispiel

Definition (Apfel)

Wir nennen etwas einen *Apfel*, wenn es grün ist.

Was ist alles ein Apfel?

$\{\mathit{Apfel}\}$

Mathematisches Denken

- Mathematik: "Wenn ..., dann ..."-Aussagen.
- Alle notwendigen Bedingungen werden genannt.
- Nicht genanntes anzunehmen ist *falsch*!
- Ausnahmen: allgemeine Konventionen
  (oft von Feld zu Feld unterschiedlich).
- "Gesunder Hausverstand" (common sense) meistens falsch.

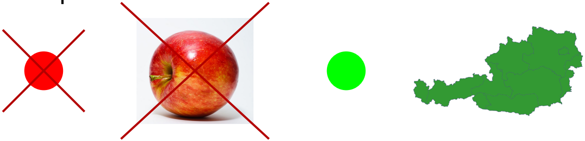
Beispiel

Definition (Apfel)

Wir nennen etwas einen *Apfel*, wenn es grün ist.

Was ist alles ein Apfel?

$\cancel{\{\mathit{Apfel}\}}$



Formale Begriffe

Menge

- Menge: eine Sammlung von “Dingen” (Elementen).
- Ganz formal: Zermelo-Fraenkel Axiome definieren Mengen.

$\Rightarrow$ Für uns: zu formal, intuitives Verstehen vorerst okay.

- Menge: zwei Arten zu definieren:
  1. Jedes Element aufzählen.
  2. Beschreiben (mit Formel), welche Elemente enthalten sind.

Beispiel

- $\{1, 2, apple\}$.
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- $\{1, 2, \ldots, 8\}$.
- Unendliche Menge: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Menge von Mengen: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$.

Menge

- Menge: eine Sammlung von “Dingen” (Elementen).
- Ganz formal: Zermelo-Fraenkel Axiome definieren Mengen.

$\Rightarrow$ Für uns: zu formal, intuitives Verstehen vorerst okay.

- Menge: zwei Arten zu definieren:
  1. Jedes Element aufzählen.
  2. Beschreiben (mit Formel), welche Elemente enthalten sind.

Beispiel

- $\{1, 2, \mathit{apple}\}$.
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- $\{1, 2, \ldots, 8\}$.
- Unendliche Menge: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Menge von Mengen: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$.

Mengen

- $\{1, \ldots, 8\}$ "…" steht für "und so weiter".
- Aus Kontext muss klar sein, was "und so weiter" bedeutet!
- Nicht klar: $\{1, 27, 36, 37, \ldots\}$.
- Zweite Art Menge zu definieren: Inhalt beschreiben.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ zwischen 1 und 8}\}$$

was, welche Form, woher wie, welche Eigenschaften

- Allgemein: $M = \{x \mid P(x)\}$.
- Wichtig: M enthält jedes x für das $P(x)$ wahr ist!
- Referenz auf sich selbst nicht erlaubt:
  Eigenschaft $P(x)$ unabhängig von M!
- Folgerung: keine Menge enthält sich selbst.
- Besser: $M = \{x \in X \mid P(x)\}$ mit X unabhängig von M.

Mengen

- $\{1, \dots, 8\}$ "…" steht für "und so weiter".
- Aus Kontext muss klar sein, was "und so weiter" bedeutet!
- Nicht klar: $\{1, 27, 36, 37, \dots\}$.

- Zweite Art Menge zu definieren: Inhalt beschreiben.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ zwischen 1 und 8}\}$$

was, welche Form, woher

wie, welche Eigenschaften

- Allgemein: $M = \{x \mid P(x)\}$.
- Wichtig: M enthält jedes x für das $P(x)$ wahr ist!

- Referenz auf sich selbst nicht erlaubt:
  Eigenschaft $P(x)$ unabhängig von M!
- Folgerung: keine Menge enthält sich selbst.
- Besser: $M = \{x \in X \mid P(x)\}$ mit X unabhängig von M.

Mengen

- $\{1, \ldots, 8\}$ "$\ldots$" steht für "und so weiter".
- Aus Kontext muss klar sein, was "und so weiter" bedeutet!
- Nicht klar: $\{1, 27, 36, 37, \ldots\}$.
- Zweite Art Menge zu definieren: Inhalt beschreiben.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ zwischen 1 und } 8\}$$

was, welche Form, woher

wie, welche Eigenschaften

- Allgemein: $M = \{x \mid P(x)\}$.
- Wichtig: M enthält jedes x für das $P(x)$ wahr ist!
- Referenz auf sich selbst nicht erlaubt:
  Eigenschaft $P(x)$ unabhängig von M!
- Folgerung: keine Menge enthält sich selbst.
- Besser: $M = \{x \in X \mid P(x)\}$ mit X unabhängig von M.

Mengen

- $\{1, \ldots, 8\}$ "$\ldots$" steht für "und so weiter".
- Aus Kontext muss klar sein, was "und so weiter" bedeutet!
- Nicht klar: $\{1, 27, 36, 37, \ldots\}$.
- Zweite Art Menge zu definieren: Inhalt beschreiben.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ zwischen 1 und 8}\}$$

was, welche Form, woher

wie, welche Eigenschaften

- Allgemein: $M = \{x \mid P(x)\}$.
- Wichtig: M enthält jedes x für das $P(x)$ wahr ist!
- Referenz auf sich selbst nicht erlaubt:
  Eigenschaft $P(x)$ unabhängig von M!
- Folgerung: keine Menge enthält sich selbst.
- Besser: $M = \{x \in X \mid P(x)\}$ mit X unabhängig von M.

Mengen

- $\{1, \ldots, 8\}$ "$\ldots$" steht für "und so weiter".
- Aus Kontext muss klar sein, was "und so weiter" bedeutet!
- Nicht klar: $\{1, 27, 36, 37, \ldots\}$.
- Zweite Art Menge zu definieren: Inhalt beschreiben.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ zwischen 1 und 8}\}$$

was, welche Form, woher   wie, welche Eigenschaften

- Allgemein: $M = \{x \mid P(x)\}$.
- Wichtig: M enthält jedes x für das $P(x)$ wahr ist!
- Referenz auf sich selbst nicht erlaubt:
  Eigenschaft $P(x)$ unabhängig von M!
- Folgerung: keine Menge enthält sich selbst.
- Besser: $M = \{x \in X \mid P(x)\}$ mit X unabhängig von M.

Mengen

- Menge ist eindeutig bestimmt durch ihre Elemente.
- $a \in M$ heißt: a ist in M enthalten.

- M ist eindeutig bestimmt, wenn jedes $a \in M$ bekannt ist!
- Mengen M und M' sind gleich, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.
- $M = M'$ falls $x \in M$ genau dann gilt, wenn $x \in M'$ gilt.

Beispiel

- $\{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{a, b, a, a, a\} = \{a, b\}$.
- Leere Menge: $\{\} = \emptyset$.

Mengen

- Menge ist eindeutig bestimmt durch ihre Elemente.
- $a \in M$ heißt: a ist in M enthalten.
- M ist eindeutig bestimmt, wenn jedes $a \in M$ bekannt ist!
- Mengen M und M' sind gleich, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.
- $M = M'$ falls $x \in M$ genau dann gilt, wenn $x \in M'$ gilt.

Beispiel

- $\{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{a, b, a, a, a\} = \{a, b\}$.
- Leere Menge: $\{\} = \emptyset$.

Mengen

- S ist Teilmenge von T wenn jedes Element von S auch in T enthalten ist.
- $S \subseteq T$: für alle $x \in S$ gilt auch $x \in T$.

Beispiel

- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$.
- $\{a, 2\} \subseteq \{a, 1, 2\}$.
- $\{a, a, a\} \subseteq \{a, b\}$.
- $\{a\} \subseteq \{a\}$.
- $\{\} \subseteq \{a\}$.

Mengen

- S ist Teilmenge von T wenn jedes Element von S auch in T enthalten ist.
- $S \subseteq T$: für alle $x \in S$ gilt auch $x \in T$.

Beispiel

- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$.
- $\{a, 2\} \subseteq \{a, 1, 2\}$.
- $\{a, a, a\} \subseteq \{a, b\}$.
- $\{a\} \subseteq \{a\}$.
- $\{\} \subseteq \{a\}$.

Mengen

- Echte Teilmenge: $S \subset T$ wenn $S \subseteq T$ und $S \neq T$.

Beispiel

- $\{a\} \subset \{a, b\}$.
- $\{a\} \not\subset \{a\}$.

- Obermenge: $S \supseteq T$, für alle $x \in T$ gilt auch $x \in S$.
- $S \supseteq T$ gilt genau dann wenn $T \subseteq S$ gilt.

Mengen

- Echte Teilmenge: $S \subset T$ wenn $S \subseteq T$ und $S \neq T$.

Beispiel

- $\{a\} \subset \{a, b\}$.
- $\{a\} \not\subset \{a\}$.

- Obermenge: $S \supseteq T$, für alle $x \in T$ gilt auch $x \in S$.
- $S \supseteq T$ gilt genau dann wenn $T \subseteq S$ gilt.

Reihenfolge

Tupel

- Mehrere Elemente in Reihenfolge: Tupel (a, b, c)
  - 2 Elemente (Tupel/Paar): (a, b)
  - 3 Elemente (Tripel): (a, b, c)
  - 4 Elemente (Quadrupel)
  - 5 Elemente (Quintupel), 6 Elemente (Sextupel)

- Position der Elemente macht Unterschied: $(a, b) \neq (b, a)$.
- $(1, b) = (1, b)$.
- $(a, a, a) \neq (a, a)$ und $(a, a) \neq (a)$.

- Unäres Tupel: (a).
- Achtung: $(a) \neq a$.
- Leeres Tupel $()$ ist auch möglich.

- Tupel haben beliebig, aber endlich viele Elemente.

Tupel

- Mehrere Elemente in Reihenfolge: Tupel (a, b, c)
  - 2 Elemente (Tupel/Paar): (a, b)
  - 3 Elemente (Tripel): (a, b, c)
  - 4 Elemente (Quadrupel)
  - 5 Elemente (Quintupel), 6 Elemente (Sextupel)
- Position der Elemente macht Unterschied: $(a, b) \neq (b, a)$.
- $(1, b) = (1, b)$.
- $(a, a, a) \neq (a, a)$ und $(a, a) \neq (a)$.
- Unäres Tupel: (a).
- Achtung: $(a) \neq a$.
- Leeres Tupel $()$ ist auch möglich.
- Tupel haben beliebig, aber endlich viele Elemente.

Tupel

- Mehrere Elemente in Reihenfolge: Tupel (a, b, c)
  - 2 Elemente (Tupel/Paar): (a, b)
  - 3 Elemente (Tripel): (a, b, c)
  - 4 Elemente (Quadrupel)
  - 5 Elemente (Quintupel), 6 Elemente (Sextupel)
- Position der Elemente macht Unterschied: $(a, b) \neq (b, a)$.
- $(1, b) = (1, b)$.
- $(a, a, a) \neq (a, a)$ und $(a, a) \neq (a)$.
- Unäres Tupel: (a).
- Achtung: $(a) \neq a$.
- Leeres Tupel $()$ ist auch möglich.
- Tupel haben beliebig, aber endlich viele Elemente.

Tupel

- Mehrere Elemente in Reihenfolge: Tupel (a, b, c)
  - 2 Elemente (Tupel/Paar): (a, b)
  - 3 Elemente (Tripel): (a, b, c)
  - 4 Elemente (Quadrupel)
  - 5 Elemente (Quintupel), 6 Elemente (Sextupel)

- Position der Elemente macht Unterschied: $(a, b) \neq (b, a)$.
- $(1, b) = (1, b)$.
- $(a, a, a) \neq (a, a)$ und $(a, a) \neq (a)$.

- Unäres Tupel: (a).
- Achtung: $(a) \neq a$.
- Leeres Tupel $()$ ist auch möglich.

- Tupel haben beliebig, aber endlich viele Elemente.

Tupel

- Menge von Tupeln: alle Tupel gleich lang.
- $T = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
- Tupel über Mengen: seien A, B Mengen,
  $T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Beispiel

Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und
$T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$

dann $T = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

- Kreuzprodukt $A \times B$: alle Tupel über A und B.
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Tupel

- Menge von Tupeln: alle Tupel gleich lang.
- $T = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
- Tupel über Mengen: seien A, B Mengen, $T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Beispiel

Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und
$T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$

dann $T = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

- Kreuzprodukt $A \times B$: alle Tupel über A und B.
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Tupel

- Menge von Tupeln: alle Tupel gleich lang.
- $T = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

- Tupel über Mengen: seien A, B Mengen,
  $T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Beispiel

Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und
$T = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$

dann $T = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

- Kreuzprodukt $A \times B$: alle Tupel über A und B.
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

Platzhalter

Variablen

- Variable: Platzhalter für Elemente (aus Domäne), die man dafür einsetzen kann.

Beispiel

Wenn X eine natürliche Zahl ist, dann gilt $X + X \geq X$.

- Variable hat Wertebereich (Domäne): Menge, deren Elemente man für X einsetzen kann.
- Einsetzen: jedes Vorkommen von X muss mit dem selben Wert aus der Domäne ersetzt werden.

Beispiel

In $X + X \geq X$ für X den Wert

- 3 einsetzen: $3 + 3 \geq 3$.
- 21 einsetzen: $21 + 21 \geq 21$.
- Falsch: $3 + X \geq 3$ oder $3 + 21 \geq 3$.

Variablen

- Variable: Platzhalter für Elemente (aus Domäne), die man dafür einsetzen kann.

Beispiel

Wenn X eine natürliche Zahl ist, dann gilt $X + X \geq X$.

- Variable hat Wertebereich (Domäne): Menge, deren Elemente man für X einsetzen kann.
- Einsetzen: jedes Vorkommen von X muss mit dem selben Wert aus der Domäne ersetzt werden.

Beispiel

In $X + X \geq X$ für X den Wert

- 3 einsetzen: $3 + 3 \geq 3$.
- 21 einsetzen: $21 + 21 \geq 21$.
- Falsch: $3 + X \geq 3$ oder $3 + 21 \geq 3$.

Variablen

- Variable: Platzhalter für Elemente (aus Domäne), die man dafür einsetzen kann.

Beispiel

Wenn X eine natürliche Zahl ist, dann gilt $X + X \geq X$.

- Variable hat Wertebereich (Domäne): Menge, deren Elemente man für X einsetzen kann.
- Einsetzen: jedes Vorkommen von X muss mit dem selben Wert aus der Domäne ersetzt werden.

Beispiel

In $X + X \geq X$ für X den Wert

- 3 einsetzen: $3 + 3 \geq 3$.
- 21 einsetzen: $21 + 21 \geq 21$.
- Falsch: $3 + X \geq 3$ oder $3 + 21 \geq 3$.

Variablen: Konventionen

- Variablennamen deuten auf Inhalt/Bedeutung.
- Element (einer Menge): x, y, z
- Menge: X, Y, Z.
- Ähnlicher Inhalt: X, X', X'', $\quad y, y', y'''$.
- Mehrere Variablen gleicher Art: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Beispiel (Elemente aufzählen)

Gegeben eine endliche Menge mit n Elementen (formal: $|M| = n$).

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$,

dann ist jedes x_i gleich einem Element von M
und $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ mit $1 \leq i, j \leq n$.

Beziehungen

Relationen

- Beispiele: $\leq \quad = \quad \neq \quad \subseteq$
- Setzen "Dinge" (Entitäten) in Beziehung.

Beispiel

- $3 \leq 5$
- $schmeckt\_gut(Schokoeis)$
- $ist\_groesser\_als(Eiffelturm, Stephansdom)$
- $ist\_erreichbar\_aus\_mit(Salzburg, Wien, Railjet)$

- Präfix-Notation: $Rel(t_1, t_2)$.
- Infix-Notation: $t_1 \; Rel \; t_2$.
- Postfix-Notation (sehr selten): $(t_1, t_2)Rel$.
- $3 \leq 5$ infix, entspricht $\leq(3, 5)$ präfix.

Relationen

- Beispiele: $\leq \quad = \quad \neq \quad \subseteq$
- Setzen "Dinge" (Entitäten) in Beziehung.

Beispiel

- $3 \leq 5$
- $\mathit{schmeckt\_gut}(\mathit{Schokoeis})$
- $\mathit{ist\_groesser\_als}(\mathit{Eiffelturm}, \mathit{Stephansdom})$
- $\mathit{ist\_erreichbar\_aus\_mit}(\mathit{Salzburg}, \mathit{Wien}, \mathit{Railjet})$

- Präfix-Notation: $\mathit{Rel}(t_1, t_2)$.
- Infix-Notation: $t_1 \; \mathit{Rel} \; t_2$.
- Postfix-Notation (sehr selten): $(t_1, t_2)\mathit{Rel}$.
- $3 \leq 5$ infix, entspricht $\leq(3, 5)$ präfix.

Relationen

- Beispiele: $\leq \quad = \quad \neq \quad \subseteq$
- Setzen "Dinge" (Entitäten) in Beziehung.

Beispiel

- $3 \leq 5$
- $\mathit{schmeckt\_gut}(\mathit{Schokoeis})$
- $\mathit{ist\_groesser\_als}(\mathit{Eiffelturm}, \mathit{Stephansdom})$
- $\mathit{ist\_erreichbar\_aus\_mit}(\mathit{Salzburg}, \mathit{Wien}, \mathit{Railjet})$

- Präfix-Notation: $\mathit{Rel}(t_1, t_2)$.
- Infix-Notation: $t_1 \ \mathit{Rel} \ t_2$.
- Postfix-Notation (sehr selten): $(t_1, t_2)\mathit{Rel}$.
- $3 \leq 5$ infix, entspricht $\leq(3, 5)$ präfix.

Relationen

- Relation: Name und Tupel wobei
- Je nach Tupel wahr oder falsch:
  $=(4,4)$ ist wahr, da $4 = 4$ ist
  $=(4,5)$ ist falsch, da $4 \neq 5$ ist.
- Relation: Menge von Tupeln.
- $\leq$ entspricht der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist kleiner als } y\}$.

Beispiel

Sei $L = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist kleiner als } y\}$,
dann $(x,y) \in L$ genau dann wenn $x \leq y$ wahr.

Relationen

- Relation: Name und Tupel wobei
- Je nach Tupel wahr oder falsch:
  $=(4,4)$ ist wahr, da $4 = 4$ ist
  $=(4,5)$ ist falsch, da $4 \neq 5$ ist.
- Relation: Menge von Tupeln.
- $\leq$ entspricht der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist kleiner als } y\}$.

Beispiel

Sei $L = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist kleiner als } y\}$,
dann $(x, y) \in L$ genau dann wenn $x \leq y$ wahr.

Funktionen

- Funktion: Nimmt Elemente ("input") und gibt Element zurück ("output").
- $$f : A \to B$$

  Funktion f nimmt Elemente von Menge A und bildet ab auf Elemente von Menge B.
- Funktionsname: f
- Signatur: $A \to B$ ("Typ der Funktion")
- Abbildung: $a \mapsto b$ was passiert konkret mit $a \in A$. ("Funktions-Definition").

Beispiel (Inkrement-Funktion (Plus-Eins))

- $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $k \mapsto k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.
- Alternative:
  $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $inc(k) = k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

Funktionen

- Funktion: Nimmt Elemente ("input") und gibt Element zurück ("output").
- $$f : A \to B$$

  Funktion f nimmt Elemente von Menge A und bildet ab auf Elemente von Menge B.
- Funktionsname: f
- Signatur: $A \to B$ ("Typ der Funktion")
- Abbildung: $a \mapsto b$ was passiert konkret mit $a \in A$. ("Funktions-Definition").

Beispiel (Inkrement-Funktion (Plus-Eins))

- $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $k \mapsto k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.
- Alternative:
  $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $inc(k) = k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

Funktionen

- Funktion: Nimmt Elemente ("input") und gibt Element zurück ("output").
- $$f : A \to B$$

  Funktion f nimmt Elemente von Menge A und bildet ab auf Elemente von Menge B.
- Funktionsname: f
- Signatur: $A \to B$ ("Typ der Funktion")
- Abbildung: $a \mapsto b$ was passiert konkret mit $a \in A$. ("Funktions-Definition").

Beispiel (Inkrement-Funktion (Plus-Eins))

- $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $k \mapsto k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.
- Alternative:
  $inc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $inc(k) = k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

Funktionen

- $f : A \to B$
- Zweistellige Funktion: $f : A \times B \to C$
- Nimmt Tupel $(a, b) \in A \times B$, bildet ab auf Element aus C.
- 3-stellige Funktion $f : A \times B \times C \to D$, 4-stellige etc.
- $f : A \to B$ entspricht Menge aller Tupel:

$$F = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

- Funktion ist auch Relation!
- Relationsname: F, Tupel: über A und B.

Funktionen

- $f : A \to B$
- Zweistellige Funktion: $f : A \times B \to C$
- Nimmt Tupel $(a, b) \in A \times B$, bildet ab auf Element aus C.
- 3-stellige Funktion $f : A \times B \times C \to D$, 4-stellige etc.
- $f : A \to B$ entspricht Menge aller Tupel:

$$F = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

- Funktion ist auch Relation!
- Relationsname: F, Tupel: über A und B.

Funktionen

- $f : A \to B$
- Zweistellige Funktion: $f : A \times B \to C$
- Nimmt Tupel $(a, b) \in A \times B$, bildet ab auf Element aus C.
- 3-stellige Funktion $f : A \times B \times C \to D$, 4-stellige etc.
- $f : A \to B$ entspricht Menge aller Tupel:

$$F = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

- Funktion ist auch Relation!
- Relationsname: F, Tupel: über A und B.

Funktion, Menge, Relation

- Unterschied Funktion f (bzw. Menge F) und Relation R:
- für jedes $a \in A$ maximal ein $b \in B$ sodass $(a, b) \in F$.
- Wenn $(a, b) \in F$, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $(a, b') \in F$.
- Jede Funktion ist auch Relation, aber nicht jede Relation ist auch Funktion.
- Relation erlaubt $r(a, b)$ wahr und gleichzeitig $r(a, b')$ wahr für $b \neq b'$
- Für Funktion gilt $F(a, b)$ wahr, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $F(a, b')$ wahr.

Funktion, Menge, Relation

- Unterschied Funktion f (bzw. Menge F) und Relation R:
- für jedes $a \in A$ maximal ein $b \in B$ sodass $(a, b) \in F$.
- Wenn $(a, b) \in F$, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $(a, b') \in F$.
- Jede Funktion ist auch Relation, aber nicht jede Relation ist auch Funktion.
- Relation erlaubt $r(a, b)$ wahr und gleichzeitig $r(a, b')$ wahr für $b \neq b'$
- Für Funktion gilt $F(a, b)$ wahr, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $F(a, b')$ wahr.

Funktion, Menge, Relation

- Unterschied Funktion f (bzw. Menge F) und Relation R:
- für jedes $a \in A$ maximal ein $b \in B$ sodass $(a, b) \in F$.
- Wenn $(a, b) \in F$, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $(a, b') \in F$.
- Jede Funktion ist auch Relation, aber nicht jede Relation ist auch Funktion.
- Relation erlaubt $r(a, b)$ wahr und gleichzeitig $r(a, b')$ wahr für $b \neq b'$
- Für Funktion gilt $F(a, b)$ wahr, dann gibt es kein $b' \in B$ sodass $F(a, b')$ wahr.

Funktionen: Eigenschaften

- $f : A \to B$

- f ist injektiv: für jedes $b \in B$ existiert höchstens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.
- f ist surjektiv: für jedes $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.

- Injektivität von f: jedes $a \in A$ bildet auf "sein eigenes" $b \in B$ ab.
- Surjektivität von f: jedes $b \in B$ wird durch irgend ein $a \in A$ "erwischt".

- f is bijektiv: injektiv und surjektiv.

Funktionen: Eigenschaften

- $f : A \to B$

- f ist injektiv: für jedes $b \in B$ existiert höchstens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.
- f ist surjektiv: für jedes $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.

- Injektivität von f: jedes $a \in A$ bildet auf "sein eigenes" $b \in B$ ab.
- Surjektivität von f: jedes $b \in B$ wird durch irgend ein $a \in A$ "erwischt".

- f is bijektiv: injektiv und surjektiv.

Funktionen: Eigenschaften

- $f : A \to B$

- f ist injektiv: für jedes $b \in B$ existiert höchstens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.
- f ist surjektiv: für jedes $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ sodass $f(a) = b$.

- Injektivität von f: jedes $a \in A$ bildet auf "sein eigenes" $b \in B$ ab.
- Surjektivität von f: jedes $b \in B$ wird durch irgend ein $a \in A$ "erwischt".

- f is bijektiv: injektiv und surjektiv.

Funktionen: Eigenschaften II

- $f : A \to B$
- f is bijektiv: injektiv und surjektiv.

- Bijektion: f bildet jedes $a \in A$ auf genau ein $b \in B$ ab.
- Bijektion: f eine 1-zu-1 Beziehung zwischen A und B.

- Totale Funktion: für jedes $a \in A$ ist $f(a)$ definiert.
- Partielle Funktion: es gibt $a \in A$ sodass $f(a)$ undefiniert.

Beispiel

Division $div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $div(x, y) = \frac{x}{y}$.
Nicht definiert für $div(2, 0)$ (Division durch Null).

Funktionen: Eigenschaften II

- $f : A \to B$
- f is bijektiv: injektiv und surjektiv.

- Bijektion: f bildet jedes $a \in A$ auf genau ein $b \in B$ ab.
- Bijektion: f eine 1-zu-1 Beziehung zwischen A und B.

- Totale Funktion: für jedes $a \in A$ ist $f(a)$ definiert.
- Partielle Funktion: es gibt $a \in A$ sodass $f(a)$ undefiniert.

Beispiel

Division $div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $div(x, y) = \frac{x}{y}$.
Nicht definiert für $div(2, 0)$ (Division durch Null).

Deterministische endliche Automaten

Deterministischer endlicher Automat (DEA)

... wird beschrieben durch ein 5-Tupel $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, wobei

- Q ... endliche Menge der Zustände
- Σ ... Eingabealphabet (*input alphabet*)
- $\delta \colon Q \times \Sigma \mapsto Q$ ... Übergangsfunktion (total) (*transition function*)
- $q_0 \in Q$ ... Anfangszustand (*initial state*)
- $F \subseteq Q$ ... Menge der Endzustände (*final states*)

δ ist eine totale Funktion: Folgezustand $\delta(q, s)$ ist für jeden Zustand $q \in Q$ und jede Eingabe $s \in \Sigma$ eindeutig definiert. $\Longrightarrow$ „deterministisch“

Erweiterte Übergangsfunktion $\delta^* \colon Q \times \Sigma^* \mapsto Q$

$\delta^*(q, \varepsilon) = q, \quad \delta^*(q, sw) = \delta^*(\delta(q, s), w)$ für alle $q \in Q$, $s \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.

Akzeptierte/Generierte Sprache

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F \}$

Wahrheit

Prädikate

- Prädikate = Relationen.
- Beispiel: $\leq (1, 3)$.
- Stelligkeit: Länge des Tupels.
- $\leq$ ist 2-stellig.
- Nullstellig: $sokrates\_ist\_ein\_mensch()$ oder $sokrates\_ist\_ein\_mensch$
- Nur nullstellige Prädikate: Aussagenlogik.
- Mehrstellige Prädikate: Prädikatenlogik, Logik erster Stufe, First Order Logic (FOL).

Prädikate

- Prädikate $=$ Relationen.
- Beispiel: $\leq (1, 3)$.
- Stelligkeit: Länge des Tupels.
- $\leq$ ist 2-stellig.
- Nullstellig: $sokrates\_ist\_ein\_mensch()$ oder $sokrates\_ist\_ein\_mensch$
- Nur nullstellige Prädikate: Aussagenlogik.
- Mehrstellige Prädikate: Prädikatenlogik, Logik erster Stufe, First Order Logic (FOL).

Prädikate

- $ist\_ein(sokrates, mensch)$
- Terme: $sokrates$, $mensch$
- Prädikatensymbol: ist_ein

$$Praedikatensymbol(Term_1, Term_2, \ldots, Term_n)$$

- Prädikate entweder wahr oder falsch (abhängig von eingesetzten Termen).
- $=(3,3)$ wahr, $=(3,4)$ falsch.

Prädikate

- $\mathit{ist\_ein}(\mathit{sokrates}, \mathit{mensch})$
- Terme: *sokrates*, *mensch*
- Prädikatensymbol: *ist_ein*

$$\mathit{Praedikatensymbol}(\mathit{Term}_1, \mathit{Term}_2, \ldots, \mathit{Term}_n)$$

- Prädikate entweder wahr oder falsch
  (abhängig von eingesetzten Termen).
- $=(3,3)$ wahr, $=(3,4)$ falsch.

Komplexe Aussagen

Formeln

- Bausteine: Prädikate, Terme (Variablen, Konstanten), Formel-Verbindungen (Konnektive), Quantoren.
- Konnektive:
  - und $\wedge$
  - oder $\vee$
  - nicht $\neg$
  - wenn ..., dann (impliziert) $\rightarrow$
  - genau dann wenn $\leftrightarrow$
- Quantoren:
  - für alle x gilt $\forall x$
  - es existiert ein x für das gilt $\exists x$

Beispiel

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion; f ist surjektiv genau dann wenn gilt:

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b.$$

Text: für jedes b aus B existiert ein a aus A, sodass $f(a) = b$ gilt.

Formeln

- Bausteine: Prädikate, Terme (Variablen, Konstanten), Formel-Verbindungen (Konnektive), Quantoren.
- Konnektive:
  - und $\wedge$
  - oder $\vee$
  - nicht $\neg$
  - wenn . . . , dann (impliziert) $\rightarrow$
  - genau dann wenn $\leftrightarrow$
- Quantoren:
  - für alle x gilt $\forall x$
  - es existiert ein x für das gilt $\exists x$

Beispiel

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion; f ist surjektiv genau dann wenn gilt:

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b.$$

Text: für jedes b aus B existiert ein a aus A, sodass $f(a) = b$ gilt.

Formeln

- Bausteine: Prädikate, Terme (Variablen, Konstanten), Formel-Verbindungen (Konnektive), Quantoren.
- Konnektive:
  - und $\wedge$
  - oder $\vee$
  - nicht $\neg$
  - wenn ..., dann (impliziert) $\rightarrow$
  - genau dann wenn $\leftrightarrow$
- Quantoren:
  - für alle x gilt $\forall x$
  - es existiert ein x für das gilt $\exists x$

Beispiel

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion; f ist surjektiv genau dann wenn gilt:

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b.$$

Text: für jedes b aus B existiert ein a aus A, sodass $f(a) = b$ gilt.

Formeln

- Bausteine: Prädikate, Terme (Variablen, Konstanten), Formel-Verbindungen (Konnektive), Quantoren.
- Konnektive:
  - und $\wedge$
  - oder $\vee$
  - nicht $\neg$
  - wenn ..., dann (impliziert) $\rightarrow$
  - genau dann wenn $\leftrightarrow$
- Quantoren:
  - für alle x gilt $\forall x$
  - es existiert ein x für das gilt $\exists x$

Beispiel

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion; f ist surjektiv genau dann wenn gilt:

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b.$$

Text: für jedes b aus B existiert ein a aus A, sodass $f(a) = b$ gilt.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive:
- $A \wedge B$ wahr: wenn A wahr und gleichzeitig B wahr.
- $A \vee B$ wahr: wenn A oder B wahr. Achtung: Wenn A und B wahr, dann ist $A \vee B$ auch wahr!
- "Ich gehe heute ins Kino ODER ich gehe heute in die Uni" auch wahr, wenn ich *beides* mache!
- $\neg A$ wahr: wenn A falsch.
- "NICHT gilt, dass der Mond aus Käse ist"
  wahr, da "Der Mond ist aus Käse" falsch.
- $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder wenn beide falsch.
- "Der Mond ist aus Käse GENAU DANN WENN der Tag 28 Stunden hat"
  wahr, da beide Aussagen falsch.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive:
- $A \wedge B$ wahr: wenn A wahr und gleichzeitig B wahr.
- $A \vee B$ wahr: wenn A oder B wahr. Achtung: Wenn A und B wahr, dann ist $A \vee B$ auch wahr!
- "Ich gehe heute ins Kino ODER ich gehe heute in die Uni" auch wahr, wenn ich *beides* mache!
- $\neg A$ wahr: wenn A falsch.
- "NICHT gilt, dass der Mond aus Käse ist"
  wahr, da "Der Mond ist aus Käse" falsch.
- $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder wenn beide falsch.
- "Der Mond ist aus Käse GENAU DANN WENN der Tag 28 Stunden hat"
  wahr, da beide Aussagen falsch.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive:
- $A \wedge B$ wahr: wenn A wahr und gleichzeitig B wahr.
- $A \vee B$ wahr: wenn A oder B wahr. Achtung: Wenn A und B wahr, dann ist $A \vee B$ auch wahr!
- "Ich gehe heute ins Kino ODER ich gehe heute in die Uni" auch wahr, wenn ich *beides* mache!
- $\neg A$ wahr: wenn A falsch.
- "NICHT gilt, dass der Mond aus Käse ist"
  wahr, da "Der Mond ist aus Käse" falsch.
- $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder wenn beide falsch.
- "Der Mond ist aus Käse GENAU DANN WENN der Tag 28 Stunden hat"
  wahr, da beide Aussagen falsch.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive:
- $A \wedge B$ wahr: wenn A wahr und gleichzeitig B wahr.
- $A \vee B$ wahr: wenn A oder B wahr. Achtung: Wenn A und B wahr, dann ist $A \vee B$ auch wahr!
- “Ich gehe heute ins Kino ODER ich gehe heute in die Uni” auch wahr, wenn ich *beides* mache!
- $\neg A$ wahr: wenn A falsch.
- “NICHT gilt, dass der Mond aus Käse ist”
  wahr, da “Der Mond ist aus Käse” falsch.
- $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder wenn beide falsch.
- “Der Mond ist aus Käse GENAU DANN WENN der Tag 28 Stunden hat”
  wahr, da beide Aussagen falsch.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive (Fortsetzung, $\rightarrow$):
- $A \rightarrow B$ wahr: wenn A falsch ODER wenn B wahr (gleichbedeutend $\neg A \vee B$).
- $A \rightarrow B$ falsch: wenn A wahr und B falsch.

Beispiel

- "WENN Wien die Hauptstadt von Österreich ist, DANN ist $2 \leq 3$" ist wahr. (*wahr* $\rightarrow$ *wahr*)
- "WENN Wien die Hauptstadt von Österreich ist, DANN ist der Mond aus Käse" ist falsch. (*wahr* $\rightarrow$ *falsch*)
- "WENN der Mond aus Käse ist, DANN ist $5 \leq 2$" ist wahr. (*falsch* $\rightarrow$ *falsch*)
- "WENN der Mond aus Käse ist, DANN ist Wien die Hauptstadt von Österreich" ist wahr. (*falsch* $\rightarrow$ *wahr*)

- Beobachtung: wenn A falsch dann ist $A \rightarrow B$ wahr.

Formeln

- Bedeutung der Konnektive (Fortsetzung, $\rightarrow$):
- $A \rightarrow B$ wahr: wenn A falsch ODER wenn B wahr (gleichbedeutend $\neg A \vee B$).
- $A \rightarrow B$ falsch: wenn A wahr und B falsch.

Beispiel

- "WENN Wien die Hauptstadt von Österreich ist, DANN ist $2 \leq 3$" ist wahr. (*wahr* $\rightarrow$ *wahr*)
- "WENN Wien die Hauptstadt von Österreich ist, DANN ist der Mond aus Käse" ist falsch. (*wahr* $\rightarrow$ *falsch*)
- "WENN der Mond aus Käse ist, DANN ist $5 \leq 2$" ist wahr. (*falsch* $\rightarrow$ *falsch*)
- "WENN der Mond aus Käse ist, DANN ist Wien die Hauptstadt von Österreich" ist wahr. (*falsch* $\rightarrow$ *wahr*)

- Beobachtung: wenn A falsch dann ist $A \rightarrow B$ wahr.

Semantik

- Prädikate: können wahr oder falsch sein.
- $\leq (3,4)$ wahr, $= (3,4)$ falsch.
- mag_pizza($Thomas$) wahr, falsch?
- wer ist Thomas, was versteht er unter Pizza, mag er sie essen, anschauen, verkaufen?
- Wahr oder falsch, je nach Interpretation
- Interpretation: sagt welche Prädikate wahr/falsch sind.
- Prädikate interpretieren: Mengen von Tupel.
- Universum: Menge über die die Interpretation spricht.

Beispiel

- Beispiel: Universum $U = \{1, 17\}$, Interpretation I sodass $I(Thomas) = 17$ und $I(\text{mag\_pizza}) = \{(17), (1)\}$.
- mag_pizza($Thomas$) wahr in (U, I)
- $(U, I) \models \text{mag\_pizza}(Thomas)$.

- Interpretation (U, I) macht die Formel wahr, ist Modell von Formel.

Semantik

- Prädikate: können wahr oder falsch sein.
- $\leq (3,4)$ wahr, $= (3,4)$ falsch.
- mag_pizza(*Thomas*) wahr, falsch?
- wer ist Thomas, was versteht er unter Pizza, mag er sie essen, anschauen, verkaufen?
- Wahr oder falsch, je nach Interpretation
- Interpretation: sagt welche Prädikate wahr/falsch sind.
- Prädikate interpretieren: Mengen von Tupel.
- Universum: Menge über die die Interpretation spricht.

Beispiel

- Beispiel: Universum $U = \{1, 17\}$, Interpretation I sodass $I(Thomas) = 17$ und $I(\text{mag\_pizza}) = \{(17), (1)\}$.
- mag_pizza(*Thomas*) wahr in (U, I)
- $(U, I) \models \text{mag\_pizza}(Thomas)$.

- Interpretation (U, I) macht die Formel wahr, ist Modell von Formel.

Semantik

- Prädikate: können wahr oder falsch sein.
- $\leq (3,4)$ wahr, $= (3,4)$ falsch.
- mag_pizza($Thomas$) wahr, falsch?
- wer ist Thomas, was versteht er unter Pizza, mag er sie essen, anschauen, verkaufen?
- Wahr oder falsch, je nach Interpretation
- Interpretation: sagt welche Prädikate wahr/falsch sind.
- Prädikate interpretieren: Mengen von Tupel.
- Universum: Menge über die die Interpretation spricht.

Beispiel

- Beispiel: Universum $U = \{1, 17\}$, Interpretation I sodass $I(Thomas) = 17$ und $I(\text{mag\_pizza}) = \{(17), (1)\}$.
- mag_pizza($Thomas$) wahr in (U, I)
- $(U, I) \models \text{mag\_pizza}(Thomas)$.

- Interpretation (U, I) macht die Formel wahr, ist Modell von Formel.

Semantik

Beispiel

Relation $=$ auch interpretiert, könnte anders (unsinnig) interpretiert werden. Interpretation soll Intuition entsprechen!
Formal: $U = \mathbb{N}$ und $I(=) = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$.

- Quantoren: $\forall x$ bzw $\exists x$.
- $\forall x : \varphi$
  wahr wenn jedes $t \in U$ eingesetzt werden kann für x in Formel φ und das Ergebnis wahr ist.

Beispiel

$\forall x : \neg(x = 3)$ mit $U = \mathbb{N}$

Einsetzen	Formel	Wahrheitswert
0	$\neg(0 = 3)$	wahr
1	$\neg(1 = 3)$	wahr
2	$\neg(2 = 3)$	wahr
3	$\neg(3 = 3)$	falsch

$\forall x : \neg(x = 3)$ falsch da ein Element in U sie falsch macht.

Semantik

- Quantoren: $\forall x$ bzw $\exists x$.
- $\exists x : \varphi$
  wahr wenn mindestens ein $t \in U$ eingesetzt für x die Formel φ wahr macht.

Beispiel

$\exists x : x = 5$ mit $U = \mathbb{N}$
Man nehme $5 \in U$, einsetzen für x, ergibt $5 = 5$, wahr; also insgesamt wahr.

- Dualität: $\forall x : \varphi$ gdw $\neg\exists x : \neg\varphi$.
- Dualität: $\exists x : \varphi$ gdw $\neg\forall x : \neg\varphi$.

Semantik

- Quantoren: $\forall x$ bzw $\exists x$.
- $\exists x : \varphi$
  wahr wenn mindestens ein $t \in U$ eingesetzt für x die Formel φ wahr macht.

Beispiel

$\exists x : x = 5$ mit $U = \mathbb{N}$
Man nehme $5 \in U$, einsetzen für x, ergibt $5 = 5$, wahr; also insgesamt wahr.

- Dualität: $\forall x : \varphi$ gdw $\neg \exists x : \neg \varphi$.
- Dualität: $\exists x : \varphi$ gdw $\neg \forall x : \neg \varphi$.

Redewendungen

- Relationen umdrehen $X \ni x$ enspricht $x \in X$.
- $S \subset T$ entspricht $T \supset S$.
- Mehrere Relationen in einem: $S \subset T \subseteq M$ oder $S \subseteq T \supset R$.
- Schreibweisen für "wobei i eine Zahl zwischen 1 und n ist":
  $1 \leq i \leq n \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \qquad i = 1 \ldots, n$
- $\forall t \in M : \varphi$ "Für alle $t \in M$ gilt φ"
  Formal: $\forall t : t \in M \to \varphi$
- $\exists t \in M : \varphi$ "Es existiert ein $t \in M$, sodass φ"
  Formal: $\exists t : t \in M \wedge \varphi$

Redewendungen

- "Für alle $x \in M$, $y \in M$ und $z \in M$ gilt ..."
  $\forall x, y, z \in M \ldots$
- Kleinstes Element aus Menge M: $m \in M$ ist kleinstes Element anhand Relation $\leq$ wenn gilt:

$$\forall m' \in M : m' \leq m \rightarrow m' = m$$

Namenskonventionen

- Namen deuten Verwendung an.
- Variablen: x, y, z, u, v, w
- Zähler/Counter: i, j, k
- Konstanten: a, b, c
- Mengen: Großbuchstaben $X, Y, Z, M, T, \ldots$
- Funktionen: f, g
- Relationen/Prädikate: p, q, r, s, t, P, Q, R
- Viele weitere Konventionen, je nach Gebiet.
- Logik: Universum U, Interpretation I, Modell M, Formel φ, ψ.

Glossar

set	Menge
subset	Teilmenge
proper subset	echte Teilmenge
tuple	Tupel
relation	Relation
function	Funktion
maps to	bildet ab auf
Let ...	Sei ...
... wobei ...	... where ...
... mit ...	... with ...
if and only if	genau dann wenn
iff	gdw
cross product	Kreuzprodukt
finite set	endliche Menge

Glossar

free variable	freie (ungebundene) Variable
domain	Wertebereich/Domäne
X'	gesprochen: X-prime oder X-foot
scope	Geltungsbereich
integer	ganze Zahl
natural number	natürliche Zahl
predicate	Prädikat
arity	Stelligkeit
term	Term
formula	Formel
connective	Konnektiv
quantifier	Quantor
group	Gruppe
field	Körper