Argumentieren und Beweisen SS 2019

Abgabe 2

Bitte arbeiten Sie die Aufgaben dieses Übungsblatts schriftlich aus und senden Sie Ihre Ausarbeitung bis zur fünften UE-Einheit an `dvorak@dbai.tuwien.ac.at` (Betreff: "UE AuB: Abgabe 2).
Sie können sich natürlich gerne mit Kolleginnen und Kollegen beratschlagen, es ist aber wichtig dass Sie Ihre Lösung eigenständig niederschreiben.

Peer-Reviewing. Die abgegebenen Lösungen werden wir einem einfachen Peer-Reviewing unterziehen. Dabei werden wir jedem Teilnehmer die Lösungen eines Kollegen zuteilen um dieses zu reviewen (d.h. die Lösung durchlesen und schriftliches Feedback geben).

Reviewer Zuteilung. Wenn Sie in einer Gruppe an den Aufgaben gearbeitet haben geben Sie bitte bei Abgabe die Gruppenmitglieder bekannt damit wir die Reviewer nicht aus dieser Gruppe wählen (und beachten Sie den Hinweis zum eigenständigen Niederschreiben der Beweise).

Aufgabe 1

Finden Sie den Fehler in der folgenden Argumentation für den Satz “Alle Giraffen sind gleich groß”.

Proof. Sei $G(n)$ die Aussage: “In jeder Mengen von n Giraffen haben alle Giraffen die gleiche Größe”.

Induktionsanfang: Offensichtlich gilt $G(0)$ und $G(1)$.

Induktionsschritt: Wir zeigen dass wenn $P(i)$ für alle $i \leq n$ gilt auch $G(n+1)$ gilt. Wir betrachten eine beliebige Menge $A = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}\}$ von $n+1$ Giraffen und die zwei Teilmengen $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ und $C = \{g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung sind alle Giraffen in B gleich groß wie g_2 und alle Giraffen in C gleich groß wie g_2. Wir haben also dass alle Giraffen in A gleich groß wie g_2 sind und daher $G(n+1)$ gilt. $\square$

Aufgabe 2

Für eine Balkenwaage sind nur Gewichte mit 4 Gramm und 5 Gramm verfügbar (davon aber beliebig viele). Beweisen Sie dass Sie jedes Gewicht über 12 Gramm auf das Gramm genau abwiegen können.

Bsp: Um 13 Gramm abzuwiegen können können Sie ein 5 Gramm Gewicht und zwei 4 Gramm Gewichte verwenden.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 5 & \text{für } n = 2 \\ f(n-1) + 2f(n-2) & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie dass $f(n) = 2^n + (-1)^n$ gilt.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgendes Spiel. Sie starten mit einem Haufen von n Murmeln. In jeder Runde des Spiels wählen Sie einen Haufen und teilen diesen in zwei Haufen beliebiger Größe. Seien a, b die Größen der neuen Haufen dann erhalten Sie für diesen Zug $a \cdot b$ Punkte. Das Spiel endet wenn alle Haufen nur eine Murmel enthalten.

Bsp: Sie starten mit einem Haufen der Größe $n = 4$ und teilen diesen im ersten Schritt in zwei gleich Große Haufen der Größe 2 und erhalten dafür $2 \cdot 2 = 4$ Punkte. In den nächsten Schritten teilen sie jeweils einen der neuen Stapel auf und erhalten dafür jeweils einen Punkt. In Summe erhalten Sie also 6 Punkte.

Zeigen Sie dass für $n \geq 1$ alle Strategien die Haufen aufzuteilen zu der gleichen Anzahl an Punkten führen.

Hinweis: Versuchen Sie zuerst die Punkte in Abhängigkeit von n anzugeben indem Sie eine konkrete Strategie analysieren und führen Sie dann einen Induktionsbeweis durch.