VORLESUNG

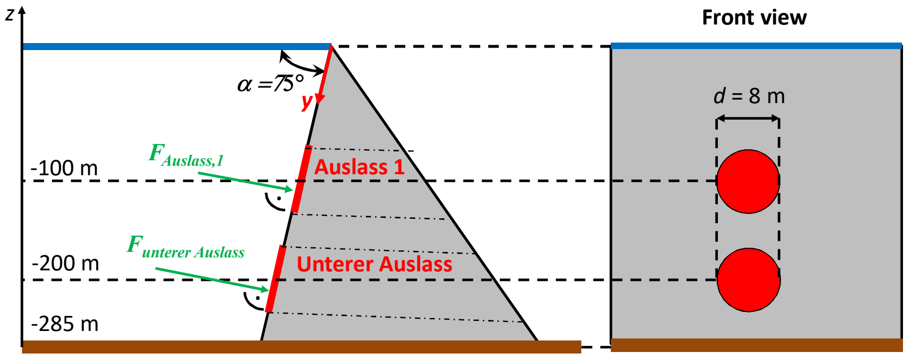
TECHNISCHE HYDRAULIK

222.564

Aufgaben - Lösungen

Hydrostatik – Laminare Strömung – Turbulente Strömung – Rohrströmung

Bsp 1. Hydrostatik: Kräfte auf untergetauchte geneigte Flächen



$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{64}\pi d^4$$

Was sind die Größe, die Richtung und der Angriffspunkt
der Kräfte, die auf beide Ausgangstore einwirken?

2

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 1. Hydrostatik: Lösung

- Kraftgröße: $F = \gamma \sin\alpha\, y_S A = \gamma h_S A$

  Mit h_s als der Tiefe von der Wasseroberfläche zum Schwerpunkt der Auslassventile

  $$\begin{cases} F_{Auslass,1} = 4.93 \times 10^7 \text{ [N]} \\ F_{unterer\ Auslass} = 9.86 \times 10^{7[} \text{ N]} \end{cases}$$

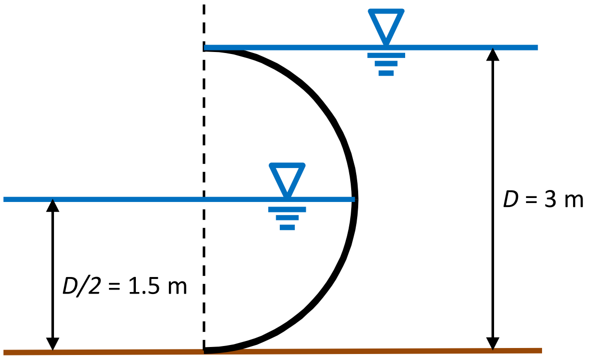
- Kraftrichtung: im rechten Winkel auf den Auslass = schließt mit der Vertikalen einen Winkel von 75° ein
- Kraftangriffspunkt, h_D: $y_D - y_s = \frac{I_{\xi\xi}}{y_S A} \longrightarrow h_D - h_s = \frac{I_{\xi\xi}}{y_s A}\sin\alpha = \frac{I_{\xi\xi}}{h_s A}\sin^2\alpha$

  $$\begin{cases} h_{D,Auslasss,1} = 100.037 \text{ [m]} \\ h_{D,unterer\ Auslass} = 200.019 \text{ [m]} \end{cases}$$

3

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_Hydrostatics angewendet werden.

Bsp 2. Hydrostatik: Kräfte auf untergetauchte gebogene Flächen



1. Zeichnen Sie die Druckverteilung und die Kraftkomponenten auf die Struktur
2. Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

Beachten Sie, dass alle Größen pro Breiteneinheit gelten.

4

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 2. Hydrostatik: Lösung

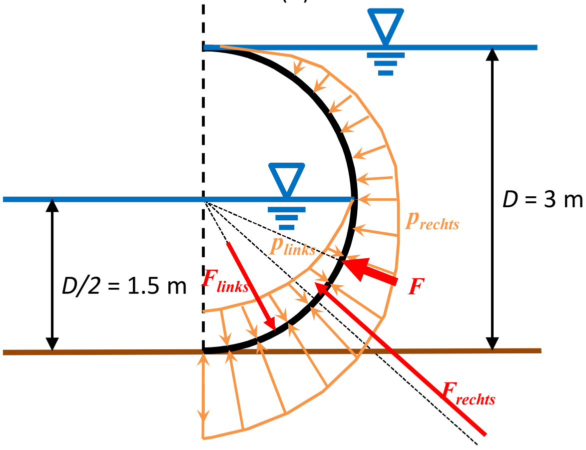
1) Zeichnen Sie die Druckverteilung und die Kraftkomponenten auf die Struktur

Druckverteilung: $p = \rho g h$

- h ist die vertikale Distanz unter der Wasseroberfläche
- p wirkt im rechten Winkel auf die Struktur

Die resultierenden Kraftkomponenten auf beiden Seiten wirken ebenfalls im rechten Winkel auf die Struktur.

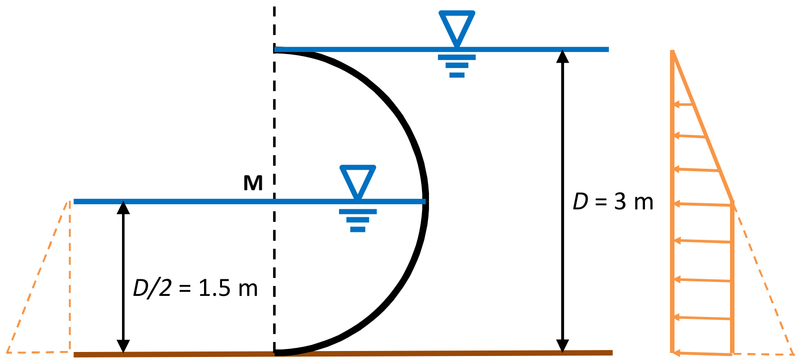
Die resultierenden Kraft auf beiden Seiten (F) wirkt ebenfalls im rechten Winkel auf die Struktur.



Bsp 2. Hydrostatik: Lösung

2) Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

- Die einfachste Methode um die resultierende Kraft zu berechnen, ist die horizontale und die vertikale Komponente separat zu berechnen.
- Die horizontale Komponente ist gleich der horizontalen Druckkraft, die auf die Projektion der Struktur auf einer vertikalen Ebene wirken würde.



6

Bsp 2. Hydrostatik: Lösung

Im Allgemeinen ist $F_{hor} = \rho g h_s A$, wobei h_s die Tiefe des Schwerpunktes unter der freien Oberfläche ist und A die Oberfläche ist auf die der Druck wirkt.

- Hier ist $h_{s,links} = D/4$, und $h_{s,rechts} = D/2$
- Da die Größen pro Breiteneinheit gelten, ist $A_{links} = D/2$ and $A_{rechts} = D$

$$\left.\begin{array}{l} F_{hor,left} = \dfrac{\rho g D^2}{8} = 11.04 \text{ [kN m}^{-1}\text{]} \\ F_{hor,right} = \dfrac{\rho g D^2}{2} = 44.15 \text{ [kN m}^{-1}\text{]} \end{array}\right\} \quad F_{hor,res} = 33{,}11 \text{ [kN m}^{-1}\text{]},$$

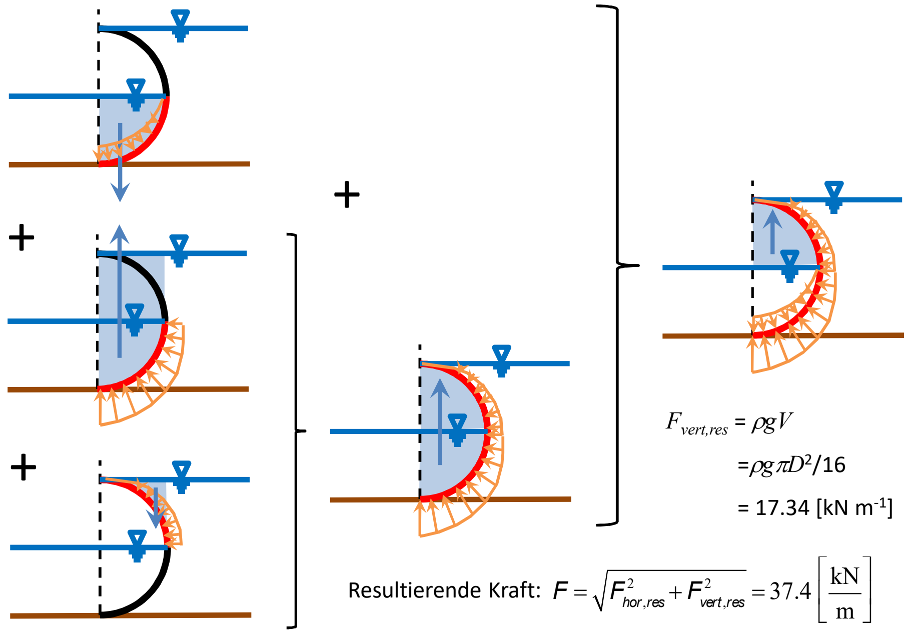
wirkt von rechts nach links

Es ist einfach, den Angriffspunkt von F_{hor} zu berechnen. Um den Angriffspunkt der Resultierenden von F_{hor} und F_{vert} zu bestimmen, ist es jedoch zweckmäßiger, die Eigenschaft auszunutzen, dass die Resultierende im rechten Winkel auf die Struktur wirkt.

2) Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

- Die vertikale Komponente ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit oberhalb der Struktur, was in diesem Fall nicht trivial ist. Ein praktischer Ansatz besteht darin, die Beiträge zur vertikalen Kraft in drei Teile zu teilen:

Bsp 2. Hydrostatik: Lösung



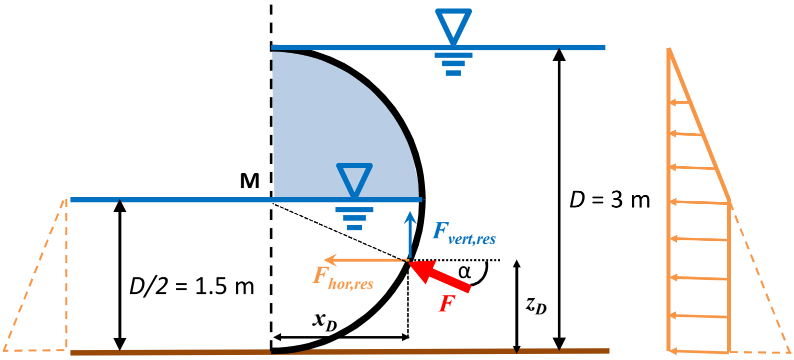
$$F_{vert,res} = \rho g V$$

$$= \rho g \pi D^2/16$$

$$= 17.34\ [\mathrm{kN\ m^{-1}}]$$

Resultierende Kraft: $F = \sqrt{F_{hor,res}^2 + F_{vert,res}^2} = 37.4 \left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\right]$

Bsp 2. Hydrostatik: Lösung



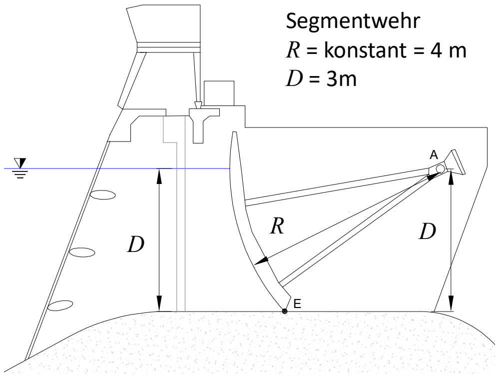
- Kraftrichtung: $\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{F_{vert,res}}{F_{hor,res}}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{17.34}{33.11}\right) = 27.64°$

- Kraftangriffspunkt: Die resultierende Kraft wirkt im rechten Winkel auf die Struktur, daher geht ihre Wirkungslinie durch den Kreismittelpunkt:

$$\begin{cases} x_D = \frac{D}{2}\cos\alpha = 1.33\ [m] \\ z_D = \frac{D}{2}(1-\sin\alpha) = 0.80\ [m] \end{cases}$$

9

Bsp 3. Hydrostatik: Kräfte auf untergetauchte gebogene Flächen



Segmentwehr
R = konstant = 4 m
D = 3m

1. Zeichnen Sie die Druckverteilung und die Kraftkomponenten auf die Struktur
2. Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

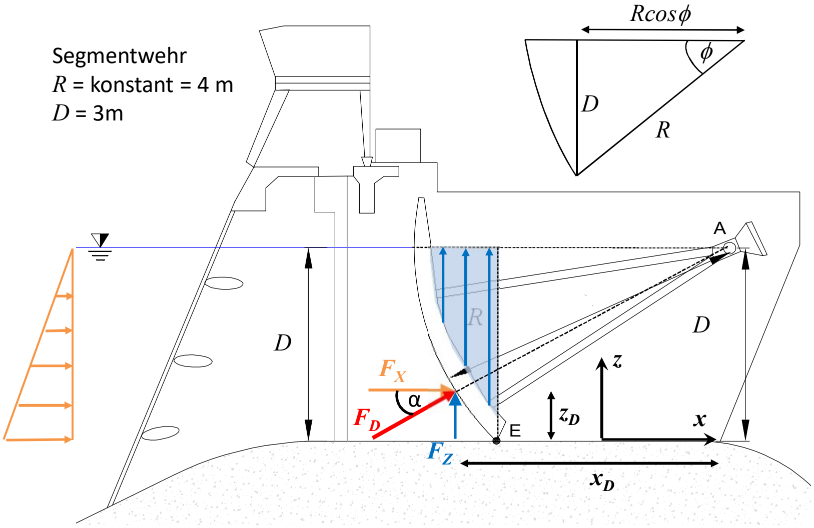
Beachten Sie, dass alle Größen pro Breiteneinheit gelten.

10

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 3. Hydrostatik: Lösung

1) Zeichnen Sie die Druckverteilung und die Kraftkomponenten auf die Struktur



11

Bsp 3. Hydrostatik: Lösung

2) Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

- Die einfachste Methode um die resultierende Kraft zu berechnen, ist die horizontale und die vertikale Komponente separat zu berechnen.
- Die horizontale Komponente ist gleich der horizontalen Druckkraft, die auf die Projektion der Struktur auf einer vertikalen Ebene wirken würde.
- Im Allgemeinen ist $F_{hor} = \rho g h_s A$, wobei h_s die Tiefe des Schwerpunktes unter der freien Oberfläche ist und A die Oberfläche ist auf die der Druck wirkt. Hier ist $h_s = D/2$. Da die Größen pro Breiteneinheit gelten, ist $A = D$

$$F_x = \frac{\rho g D^2}{2} = 44.15 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right]$$

- Die vertikale Komponente F_z ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit oberhalb der Struktur (siehe Skizze). Sie wirkt in diesem Fall eindeutig nach oben

$$F_z = \rho g V = \rho g \left(\pi R^2 \frac{\phi}{360} - \frac{R \cos\phi . D}{2} \right) = 27.6 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right] \text{, wobei } \sin\phi = \frac{3}{4} \rightarrow \phi = 48.6°$$

- Die resultierende Kraft ist: $F_D = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 52.1 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right]$

12

Zur Lösung kommt man, wenn die relevanten Formeln der VO TH_Hydrostatics angewendet werden.

Bsp 3. Hydrostatik: Lösung

2) Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente, die vertikale Kraftkomponente, sowie die resultierende Kraft, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

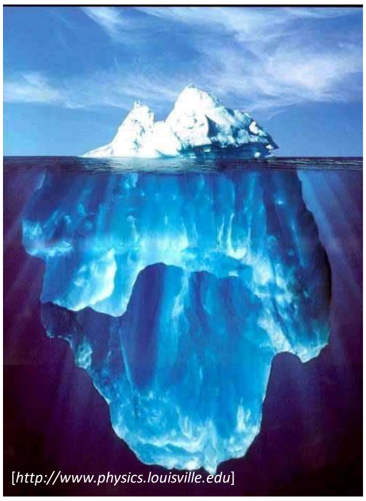
- Da der Druck in jedem Punkt im rechten Winkel auf die kreisförmige Struktur wirkt, wirkt die resultierende Kraft auch im rechten Winkel auf die Struktur, und ihre Wirkungslinie verläuft durch den Kreismittelpunkt.
- Kraftrichtung: $\alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{F_z}{F_x}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{27.62}{44.15}\right) = 32.0°$
- Kraftangriffspunkt: Die resultierende Kraft wirkt im rechten Winkel auf die Struktur, daher geht ihre Wirkungslinie durch den Kreismittelpunkt:

$$\begin{cases} x_D = R\cos\alpha = 3.39\ [m] \\ z_D = D - R\sin\alpha = 0.88\ [m] \end{cases}$$

13

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_Hydrostatics angewendet werden.

Bsp 4. Hydrostatik: Archimedisches Prinzip – Auftriebskraft



ρ_{wasser} (0°) = 999.8 kg m^{-3}
ρ_{eis} (0°) = 916.7 kg m^{-3}

Wieviel Prozent des Eisberges ragen über der Wasseroberfläche?

14

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 4. Hydrostatik: Lösung

Die nach oben wirkenden Kräfte und die nach unten wirkenden Kräfte sind im Gleichgewicht: $F_{hinunter} = F_{hinauf}$

Die nach unten wirkende Kraft ist das Gewicht des Eisberges: $F_{down} = \rho_{ice} g V_{ice}$

Die nach oben wirkende Archimedische Kraft ist gleich dem Gewicht des verdrängten Wassers: $F_{up} = \rho_{water} g V_{ice,immersed}$

$$\rightarrow \frac{V_{ice,immersed}}{V_{ice}} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{water}} = \frac{916.7}{999.8} = 0.92$$

→ 8% des Eisberges ragen aus dem Wasser

15

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_Hydrostatics angewendet werden.

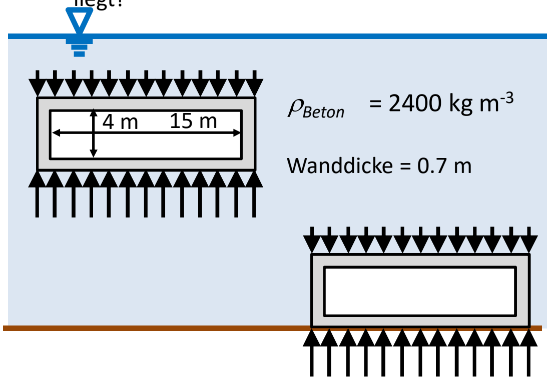
Bsp 5. Hydrostatik: Archimedisches Prinzip – Auftriebskraft

1) Wird das Tunnelelement schwimmen oder sinken?

2) Wenn es schwimmt, welche Kraft wird benötigt um es auf den Grund zu bringen?

3) Wenn es schwimmt, was ist seine stabile Position (wieviel befindet sich über der Wasseroberfläche)?

4) Was ist die resultierende vertikale Kraft pro Längeneinheit wenn das Tunnelelement am Grund liegt?



16

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 5. Hydrostatik: Lösung

1) Wird das Tunnelelement schwimmen oder sinken?

Nehmen wir an, dass das Tunnelelement vollständig in das Wasser eingetaucht ist. Wenn die nach unten gerichtete Gewichtskraft W kleiner ist als die nach oben gerichtete Archimedische Kraft F_A, wird es schwimmen. Ist W größer als F_A, wird das Tunnelelement sinken. Beachten Sie, dass wir Kräfte pro Längeneinheit betrachten.

$$W = \rho_{Beton} g V_{Beton}$$
$$= 2400 \text{ x } 9.81 \text{ x } [(4 + 2\text{x}0.7) \text{ x } (15 + 2\text{x}0.7) - 4\text{x}15]$$
$$= 672.4 \text{ [kN m}^{-1}\text{]}$$

$$F_A = \rho_{wasser} g V_{verdrängte\ Flüssigkeit}$$
$$= 1000 \text{ x } 9.81 \text{ x } [(4 + 2\text{x}0.7) \text{ x } (15 + 2\text{x}0.7)]$$
$$= 868.8 \text{ [kN m}^{-1}\text{]}$$

$F_A > W$
→ das Tunnelelement schwimmt.

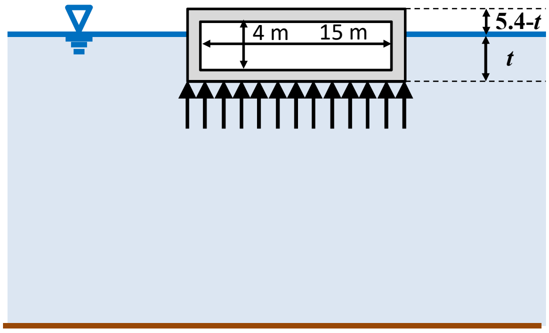
2) Wenn es schwimmt, welche Kraft wird benötigt um es auf den Grund zu bringen?

Um das Tunnelelement auf den Grund zu bringen, wird eine zusätzliche nach unten wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ benötigt, sodass die nach unten wirkende Gesamtkraft größer ist als die nach oben wirkende Archimedische Kraft:

$$W + F > F_A \rightarrow F > F_A - W = 868.8 - 672.4 = 196.4 \text{ [kN m}^{-1}\text{]}$$

Bsp 5. Hydrostatik: Lösung

3) Wenn es schwimmt, was ist seine stabile Position (wieviel befindet sich über der Wasseroberfläche)?



Das Tunnelelement schwimmt wenn $W = F_A$. Die Gewichtskraft W hängt nicht vom Grad des Eintauchens ab, aber weil das Volumen der verdrängten Flüssigkeit davon abhängt, hängt F_A auch vom Eintauchgrad ab.

$W = 672.4$ [kN m^{-1}]

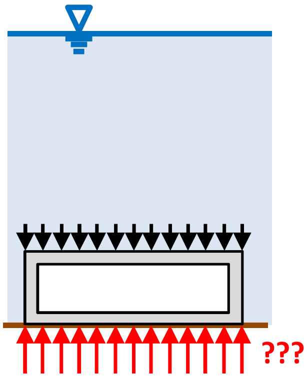
$$F_A = \rho_{wasser} V_{verdrängte\ Flüssigkeit}$$
$$= 1000 \times 9.81 \times [t \times (15 + 2 \times 0.7)]$$
$$= 160.9 \times t \text{ [kN m}^{-1}]$$

$W = F_A$ if $t = 4.18$ [m]

→ Das Tunnelelement ragt $5.4 - t = 1.22$ [m] aus dem Wasser.

Bsp 5. Hydrostatik: Lösung

4) Was ist die resultierende vertikale Kraft pro Längeneinheit wenn das Tunnelelement am Grund liegt?



Das ist eine knifflige Frage. Alles hängt von den Druckkräften auf den Boden des Tunnelelements ab.

Solange sich unter dem Tunnelelement Wasser befindet, wirkt der hydrostatische Druck auf den Boden und die in Frage 1) berechnete archimedische Kraft F_A neigt dazu, das Tunnelelement von unten anzuheben. Dies ist der Fall, wenn:

- Der Boden besteht aus körnigem Material, da sich in den Poren zwischen den Körnern Wasser befindet.
- Der Boden ist nicht perfekt flach. In diesem Fall ist es sehr schwierig, das gesamte unter dem Tunnelelement liegende Wasser zu entfernen.

Nur bei einer vollkommen ebenen und undurchlässigen Bodenfläche wird kein hydrostatischer Druck mehr auf den Boden des Tunnelelements ausgeübt. In diesem Fall befindet sich die einzige vertikale Komponente des hydrostatischen Drucks auf der Oberseite des Tunnelelements und stabilisiert das Tunnelelement am Grund.

19

Bsp 6. Hydrostatik: Archimedisches Prinzip – Auftriebskraft

Ein Behälter mit Wasser steht auf einer Waage. Man taucht den Finger ein – was passiert mit der Anzeige auf der Waage?

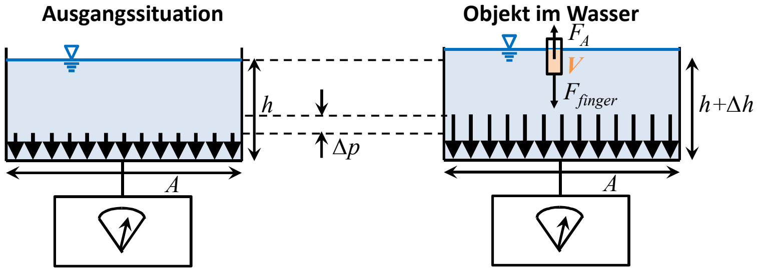
a) steigt
b) sinkt
c) bleibt gleich?

Begründung ?

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 6. Hydrostatik: Lösung

Ausgangssituation | **Objekt im Wasser**



Das von der Waage angezeigte Gewicht ist das Ergebnis der vertikalen Komponente aller Druckbeiträge: $F_p = pA = \rho g h A$.

Angenommen, das eingebrachte Objekt hat ein eingetauchtes Volumen V. Der Wasserpegel im Empfänger steigt um $\Delta h = V/A$ und der Druck am Boden steigt um $\Delta p = \rho g \Delta h$. Daher wird das Integral des Drucks auf den Boden um $\Delta F_p = \Delta p A = \rho g V$ ansteigen.

- $\Delta F_p = \rho g V = F_A$ ist gleich der nach oben gerichteten archimedischen Kraft auf das Objekt (Gewicht der verdrängten Flüssigkeit).
- Ihr Finger ist im Wasser im Gleichgewicht, was bedeutet, dass die Kräfte auf Ihrem Finger im Gleichgewicht sind. Dies bedeutet, dass die nach oben gerichtete Kraft, die durch das Wasser auf Ihren Finger F_A ausgeübt wird, gleich der nach unten gerichteten Kraft ist, die von Ihrem Finger auf das Wasser F_{finger} ausgeübt wird (Newtons drittes Gesetz).
- Die von der Waage angezeigte Gewichtsänderung ΔW ist daher $\Delta F_p - F_A + F_{finger} = F_{finger} = F_A = \rho g V$. Beachten Sie, dass ΔW nur vom eingetauchten Volumen Ihres Fingers und nicht von der Dichte Ihres Fingers abhängt.
- Beachten Sie, dass die Lösung für ein schwimmendes Objekt unterschiedlich ist. Dann ist die nach oben gerichtete archimedische Kraft F_A gleich dem Gesamtgewicht des Objekts W_{objekt}, was zu dem logischen Ergebnis führt, dass das Gewicht, das durch die Waage angezeigt wird, das Gewicht des Wassers plus das Gewicht des eingebrachten Objekts ist.

Bsp 7. Hydrostatik: Archimedisches Prinzip – Auftriebskraft

Ein Fischer sitzt in einem Boot in einem kleinen Teich und wirft den Anker aus. Was passiert mit dem Wasserspiegel?

a) steigt

b) sinkt

c) bleibt gleich?

Und wenn der Teich sehr groß ist ?

Aufgabe der VO TH_Hydrostatics

Bsp 7. Hydrostatik: Lösung

Wenn der Anker ins Wasser geworfen wird:

- Er verdrängt im Teich ein Flüssigkeitsvolumen, das seinem Volumen entspricht, $\Delta V_1 = V_{anker}$.
- Das Boot wird um $\Delta W = \rho_{anker} V_{anker}$ leichter. Als Ergebnis wird die archimedische Kraft, die erforderlich ist, um das Boot schwimmend zu halten, um $\Delta F_A = \Delta W = \rho_{wasser} \Delta V_2$ reduziert, wobei ΔV_2 die entsprechende Verringerung des Volumens der verdrängten Flüssigkeit darstellt.

→ Das Gesamtvolumen der verdrängten Flüssigkeit im Teich wird abnehmen um:

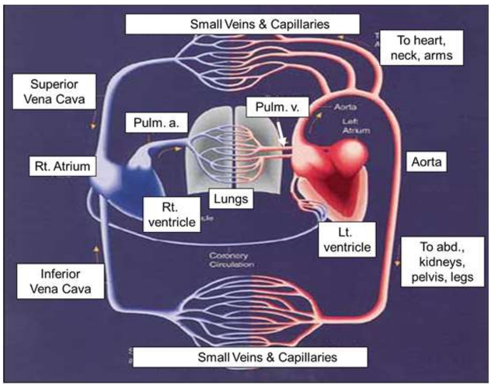
$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = V_{anchor} \left(\frac{\rho_{anchor}}{\rho_{water}} - 1 \right) > 0$$

Dies bewirkt eine Absenkung des Wasserspiegels im Teich um $\Delta h = (\Delta V_2 - \Delta V_2)/A$, wobei A die Oberfläche des Teiches ist. Diese Absenkung ist vernachlässigbar, selbst bei sehr kleinen Teichen.

23

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_Hydrostatics angewendet werden.

Bsp 1. Rohrströmung



Angabe:

- $\rho = 1060$ [kg m^{-3}]
- $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ [kg m^{-1} s^{-1}]
- Herz Pumpt rund 6 Liter pro Minute
- Durchmesser der Aorta: 0.025 [m]

Vereinfachungen:

- Blut darf als Newtonsche Flüssigkeit betrachtet werden
- Vernachlässigen Sie den schwallartigen Charakter der Strömung; Approximieren Sie die Spitzenabflüsse als den doppelten durchschnittlichen Abfluss (als ob 12 Liter pro Minute mit einer konst. Rate durchströmt würden)
- Vernachlässigen Sie die Elastizität der Aorta

Fragen:

- Berechnen Sie: $-\partial p^*/\partial x$, τ_b, $u(r)$, u_{max}, U
- Ist Strömung laminar oder turbulent ?
- Was ist der Effekt von einem Durchmesserwechsel? Tipp: drücken Sie Re als eine Funktion von Q und D aus.

24

Bsp 1. Rohrströmung: Lösung

Nehmen wir an, dass die Strömung laminar ist, was noch zu verifizieren ist!

- **Hagen-Poiseuille Gesetz:**

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)R^4 = \frac{\pi}{128\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)D^4 \longrightarrow -\frac{\partial p^*}{\partial x} = 62.6\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Hinweis: Es ist wichtig, immer SI-Einheiten zu verwenden. Dies bedeutet, dass der Durchfluss in [m3 s-1] umgerechnet werden muss. Es empfiehlt sich, zu überprüfen, ob die Einheiten des Endergebnisses korrekt sind.

- **Wandschubspannung:** $\pi R^2 \frac{\partial p^*}{\partial x} = 2\pi R \tau_b \longrightarrow \tau_b = -0.39\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Hinweis: Minuszeichen, weil der von der Wand auf die Strömung ausgeübte Schub ein Widerstand ist, der der Strömung entgegengesetzt ist. Die Strömung übt einen Schub an der Wand aus, die die gleiche Größe, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat.

- **Geschwindigkeitsverteilung:**

$$u = u(r=0)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \left[\frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)R^2\right]\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = 0.82\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0.41\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

25

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_LaminarFlow angewendet werden.

Bsp 1. Rohrströmung: Lösung

- **Strömungsregime:** $\mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{\rho UD}{\mu} = 3599$

Der Theorie zufolge liegt die kritische Reynoldszahl für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung im Bereich von 2000 bis 4000 und hängt von der spezifischen Strömungskonfiguration ab. Der erhaltene Wert ist daher nicht schlüssig. Aber die Natur ist ein guter Ingenieur. Da die laminare Strömung energetisch vorteilhaft ist, ist der arterielle Fluss bei einer gesunden Person laminar.

- **Was ist der Effekt von einem Durchmesserwechsel? Tipp: Drücken Sie Re als eine Funktion von Q und D aus.**

Die Antwort wurde in der Vorlesung TH_Laminar_Turbulent ausführlich beschrieben

Bsp 2. Rohrströmung

Angabe:
- $\rho = 900$ [kg m^{-3}]
- $\mu = 1.0$ [kg m^{-1} s^{-1}]. Beachten Sie, dass die Viskosität über zumindest 2 Größen-ordnungen schwanken kann. Die Viskosität kann von Additiven gesenkt werden.
- $Q = 2.5$ [m^3 s^{-1}]
- $D = 1$ [m] Das Rohrmaterial ist sehr glatt.

Vereinfachungen:
- Betrachten sie Öl als eine Newtonsche Flüssigkeit. In Realität ist Öl keine Newtonsche Flüssigkeit mit einer Viskosität, welche stark von Temperatur und anderen Faktoren abhängig ist.

Fragen:
- Berechnen Sie die folgenden charakteristischen Flussparameter: $-\partial p^*/\partial x$, τ_b, $u(r)$, u_{max}, U
- Ist die Strömung laminar oder turbulent?
- Was ist die Auswirkung von einem Viskositätswechsel auf die Flussstabilität (Re) und den gesuchten Druckgradienten? Betrachten sie Viskositäten, welche 10x höher und niedriger sind.

27

Bsp 2. Rohrströmung: Lösung

Nehmen wir an, dass die Strömung laminar ist, was noch zu verifizieren ist!

- **Hagen-Poiseuille Gesetz:**

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)R^4 = \frac{\pi}{128\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)D^4 \longrightarrow -\frac{\partial p^*}{\partial x} = 101.9\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Hinweis: Es ist wichtig, immer SI-Einheiten zu verwenden. Dies bedeutet, dass der Durchfluss in [m3 s-1] umgerechnet werden muss. Es empfiehlt sich, zu überprüfen, ob die Einheiten des Endergebnisses korrekt sind.

- **Wandschubspannung:** $\pi R^2 \frac{\partial p^*}{\partial x} = 2\pi R\tau_b \longrightarrow \tau_b = -25.5\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Hinweis: Minuszeichen, weil der von der Wand auf die Strömung ausgeübte Schub ein Widerstand ist, der der Strömung entgegengesetzt ist. Die Strömung übt einen Schub an der Wand aus, die die gleiche Größe, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat.

- **Geschwindigkeitsverteilung:**

$$u = u(r=0)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \left[\frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)R^2\right]\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = 6.4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 3.2\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{-1}}\right]$$

28

Zur Lösung kommt man wenn die relevanten Formeln der VO TH_LaminarFlow angewendet werden.

Bsp 2. Rohrströmung: Lösung

- **Strömungsregime:** $\mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{\rho UD}{\mu} = 2865$

Der Theorie zufolge liegt die kritische Reynoldszahl für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung im Bereich von 2000 bis 4000 und hängt von der spezifischen Strömungskonfiguration ab. Der erhaltene Wert ist daher nicht schlüssig, und wir können nicht sicher sein, dass die Lösungen für $\partial p^*/\partial x$, τ_b und die Geschwindigkeitsverteilung korrekt sind.

- **Was ist die Auswirkung von einem Viskositätswechsel ?**
  - Die im Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit wird sich nicht ändern, da sie vollständig durch das gegebene Q und D bestimmt wird.
  - Für eine Viskosität, die 10 mal höher ist, wird Re 10 Mal niedriger und die Strömung wird laminar sein. Die auf der vorherigen Folie abgeleitete Geschwindigkeitsverteilung ist korrekt. Die Strömung wird durch einen Wert von $\partial p^*/\partial x$ induziert, der 10-mal höher ist als der Wert auf der vorherigen Folie. Die Wandschubspannung ist ebenfalls 10-mal höher als jene der vorherigen Folie.
  - Für eine Viskosität, die 10 mal niedriger ist, wird Re 10-mal höher sein und die Strömung wird turbulent sein. Die Lösungen für laminare Strömung sind nicht mehr gültig, und die Theorie für turbulente Strömung muss verwendet werden.

29

Bsp 3. Rohrströmung


Opponitz Kraftwerk , Wien Energie, Austria

Angabe:

- $\rho = 1000$ [kg m^{-3}]
- $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ [kg m^{-1} s^{-1}]
- $Q = 8$ [m^3 s^{-1}]
- $D = 1$ [m]

Fragen:

- Ist die Strömung laminar oder turbulent ?
- Wenn die Strömung turbulent ist, wäre es möglich die Strömung laminar werden zu lassen, nur durch Adaptierung des Durchmessers D ?
- Welches Gefälle wäre notwendig, um Q in diesem Rohr bei einer laminaren Strömung fließen zu lassen?

30

Exercise from TH_LaminarFlow

Bsp 3. Rohrströmung: Lösung

- **Ist die Strömung laminar or turbulent ?**

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re} &= \frac{UD}{\nu} = \frac{\rho UD}{\mu} \\ U &= \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{4\rho Q}{\pi\mu D} = 1.02\mathrm{x}10^7 \longrightarrow \text{Turbulent}$$

- **Wenn die Strömung turbulent ist, wäre es möglich die Strömung laminar werden zu lassen, nur durch Adaptierung des Durchmessers D?**

$$D = \frac{4\rho Q}{\pi\mu \mathrm{Re}} = 5093\ [\mathrm{m}]$$ wobei Re = 2000 gewählt wurde, um eine laminare Strömung zu garantieren

→ Dies ist offensichtlich ein unrealistischer Wert.

31

Bsp 3. Rohrströmung: Lösung

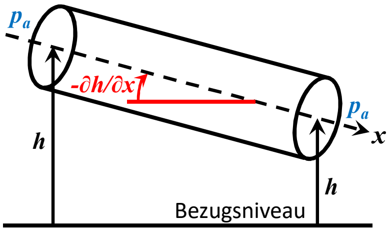
- **Welches Gefälle wäre notwendig, um *Q* in diesem Rohr bei einer laminaren Strömung fließen zu lassen?**

Hagen-Poiseuille Gesetz:

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)R^4 = \frac{\pi}{128\mu}\left(-\frac{\partial p^*}{\partial x}\right)D^4 \longrightarrow \; -\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0.33\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho g h\right) = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\rightarrow \text{slope} = \text{atan}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right) \approx -\frac{\partial h}{\partial x} = 3.3\text{x}10^{-5}$$

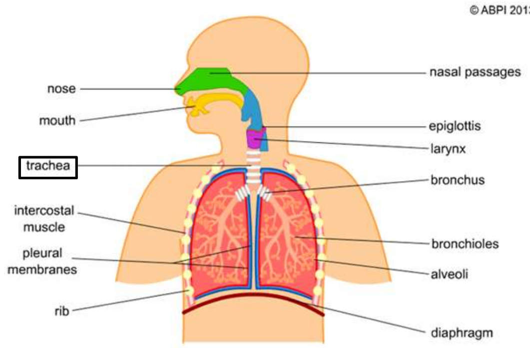


Ein sehr geringes Gefälle würde ausreichen, um die Entladung zu transportieren, wenn die Strömung bei dieser Re-Zahl laminar wäre. Da die Strömung bei dieser Re-Zahl turbulent ist, sind die Energieverluste viel höher und eine viel höhere Steigung ist erforderlich, um die gleiche Entladung zu transportieren.

32

Bsp 4. Rohrströmung

Case	ρ [kg m^{-3}]	μ [kg m^{-1} s^{-1}]	$\nu=\mu/\rho$ [m^2 s^{-1}]	U [m s^{-1}]	D [m]	Re [-]
Respiration	1.1	1.87E-05	1.70E-05	1.6	0.02	1.9E+03



Angenommen, die Luftströmung in der Luftröhre kann durch Strömung in einem starren Rohr angenähert werden.

1. Berechnen und zeichnen Sie die Energieverluste pro Längeneinheit als Funktion der Luftgeschwindigkeit für einen Durchmesser von 0,02 m.
2. Berechnen und zeichnen Sie die Energieverluste pro Längeneinheit als eine Funktion des Durchmessers für einen gegebenen Durchfluss entsprechend den in der Tabelle angegebenen Werten.

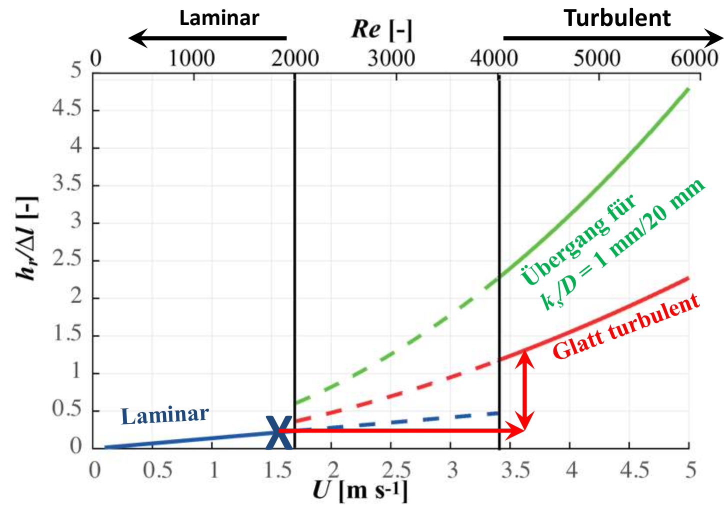
33

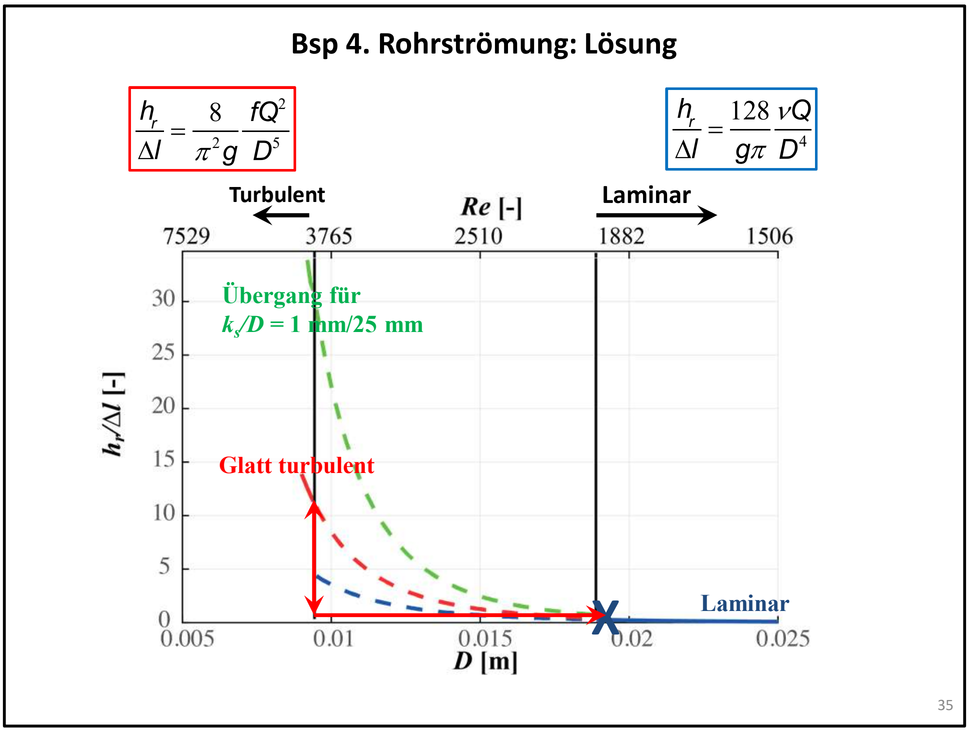
Beispiel aus der Vorlesung TH_Laminar_Turbulent. Die Lösung ist ähnlich dem Beispiel zur Arterienströmung.

Bsp 4. Rohrströmung: Lösung

$$\frac{h_r}{\Delta l} = \frac{32}{g}\frac{\nu U}{D^2}$$

$$\frac{h_r}{\Delta l} = \frac{1}{2g}\frac{fU^2}{D}$$





Beachten Sie, dass Energieverluste viel größer sind als in der arteriellen Strömung.
Das ist weil:

(i) die Luftgeschwindigkeit in der Luftröhre ist viel höher als die Blutgeschwindigkeit in der Aorta, was zu einem höheren Durchfluss führt

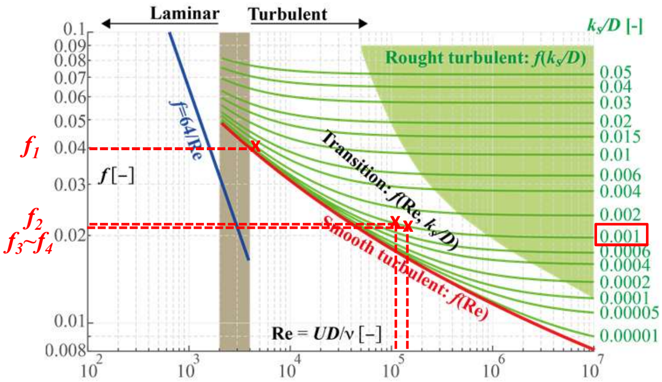
(ii) die kinematische Viskosität von Luft ist dreimal größer als die von Wasser.

Bsp 5. Rohrströmung

Wasser mit einer Temperatur von 10°C fließt in einem Rohr mit einem Durchmesser von D = 0,3 m. Die Rauheit des Stahlrohres ist durch eine äquivalente Sandrauigkeit von ks = 0,0003 m gekennzeichnet. Die Energieverluste pro Längeneinheit betragen 0,002.

1) Bestimmen Sie das Strömungsregime
2) Bestimmen Sie den Dary-Weisbach Reibungskoeffizient f
3) Bestimmen Sie den Durchfluss Q

Hinweis: Die Lösung verwendet das Moody-Stanton-Diagramm oder die äquivalente Colebrook-White-Formel



36

Bsp 5. Rohrströmung: Lösung

Lösung gemäß Beispiel 2 aus TH_Pipeflow

Wasser bei 10°C: ν = 1.307x10^{-6} [m^2 s^{-1}]

D, h_r, k_s, ν bekannt → Q, U, f, Re zu ermitteln

Iterationsschritt 1:

1. Erste Schätzung von f.

$k_s = 0.3 \times 10^{-3}$ [m] → $k_s/D = 1 \times 10^{-3}$.

Re ist unbekannt

Wir wählen einen Anfangswert von f auf der Kurve k_s/D = 0.001 im Moody-Stanton-Diagramm

Da wir für diese Strömung eine relativ hohe Re-Zahl erwarten, wäre es logisch, einen Anfangswert auf der rechten Seite der k_s/D = 0.001-Kurve nahe dem Wert für eine raue turbulente Strömung zu wählen, die unabhängig von Re ist. **Um den iterativen Vorgang zu veranschaulichen**, nehmen wir einen Anfangswert von f zur linken Seite der k_s/D = 0.001-Kurve.

f_1 = 0.04 (siehe Skizze auf der vorherigen Folie).

2. Erste Schätzung von Q von der Darcy-Weisbach Gleichung:

$$Q_1 = \left(\frac{h_r}{\Delta l} \frac{\pi^2 g}{8} \frac{1}{f_1} D^5 \right)^{1/2} = 0.0383 \text{ [m}^3\text{ s}^{-1}]$$

3. Erste Schätzung von Re:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q_1}{\pi D \nu} = 1.25 \times 10^5$$

Bsp 5. Rohrströmung: Lösung

Iterationsschritt 2:

1. Neue Schätzung von *f*.

$k_s = 0.3 \times 10^{-3}$ [m] → $k_s/D = 1 \times 10^{-3}$.
$Re_1 = 1.72 \times 10^5$
} $f_2 = 0.022$ (siehe Skizze auf vorheriger Folie)

2. Neue Schätzung von Q von der Darcy-Weisbach Gleichung:

$$Q_2 = \left(\frac{h_r}{\Delta l}\frac{\pi^2 g}{8}\frac{1}{f_2}D^5\right)^{1/2} = 0.0517 \text{ [m}^3\text{ s}^{-1}]$$

3. Neue Abschätzung von *Re:* $Re_2 = \frac{4Q_2}{\pi D \nu} = 1.68 \times 10^5$

Iterationsschritt 3:

1. Neue Schätzung von *f*.

$k_s = 0.3 \times 10^{-3}$ [m] → $k_s/D = 1 \times 10^{-3}$.
$Re_2 = 1.68 \times 10^5$
} $f_3 = 0.021$ (siehe Skizze auf vorheriger Folie)

2. Neue Schätzung von Q von der Darcy-Weisbach Gleichung:

$$\boxed{Q_3 = \left(\frac{h_r}{\Delta l}\frac{\pi^2 g}{8}\frac{1}{f_3}D^5\right)^{1/2} = 0.0529 \text{ [m}^3\text{ s}^{-1}]}$$

3. Neue Schätzung von *Re:* $Re_3 = \frac{4Q_3}{\pi D \nu} = 1.72 \times 10^5$

Iterationsschritt 4:

1. Neue Schätzung von *f*:

$k_s = 0.3 \times 10^{-3}$ [m] → $k_s/D = 1 \times 10^{-3}$.
$Re_3 = 1.72 \times 10^5$
} $\boxed{f_4 \approx f_3 = 0.021}$ → Lösung konvergiert!

Strömungsregime: turbulenter Übergang

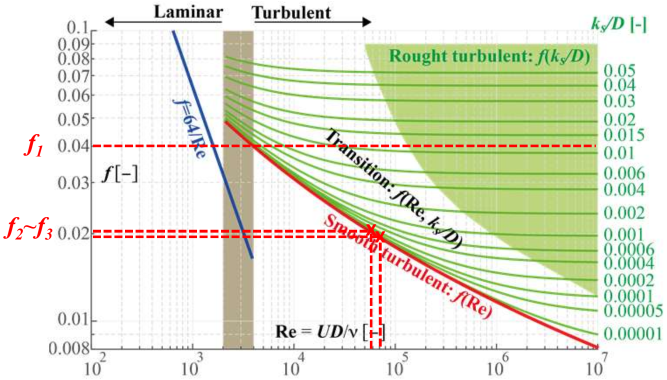
38

Bsp 6. Rohrströmung

Ein 0.250 $m^3\,s^{-1}$ Durchfluss von Benzin mit einer kinematischen Viskosität von $9 \times 10^{-6}\,m^2\,s^{-1}$ wird in einer 10.000 m langem Stahl-Pipeline mit einer charakteristischen Sandrauigkeit von k_s = 0.00005 m transportiert. Der Gesamtenergieverlust beträgt 25 m.

1) Bestimmen Sie das Strömungsregime
2) Bestimmen Sie den Darcy-Weisbach Reibungskoeffizient f
3) Bestimmen Sie den Durchfluss Q

Hinweis: Die Lösung verwendet das Moody-Stanton-Diagramm oder die äquivalente Colebrook-White-Formel



39

Bsp 6. Rohrströmung: Lösung

Q, h_r, k_s, ν bekannt → U, D, f, Re zu ermitteln

Iterationsschritt 1:

1. Erste Schätzung von f_1. Sowohl Re als auch k_s/D sind unbekannt, dies macht die Schätzung schwieriger.

   f_1 = 0.04 (siehe Skizze auf vorheriger Folie)

2. Erste Schätzung D_1 von der Darcy-Weisbach Gleichung: $$D_1 = \left(\frac{8}{\pi^2 g}\frac{\Delta l Q^2}{h_r}\right)^{1/5} f_1^{1/5} = 0.61\ [\mathrm{m}]$$

3. Erste Schätzung Re_1: $$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q}{\pi D_1 \nu} = 5.8 \times 10^4$$

Iterationsschritt 2:

1. Neue Schätzung von f: $$\left.\begin{array}{l} k_s/D = 0.00005/0.61 = 0.00008 \\ \mathrm{Re}_1 = 5.8 \times 10^4 \end{array}\right\} f_2 = 0.02 \text{ (siehe Skizze auf vorheriger Folie)}$$

2. Neue Schätzung D_2 von der Darcy-Weisbach Gleichung: $$\boxed{D_2 = \left(\frac{8}{\pi^2 g}\frac{\Delta l Q^2}{h_r}\right)^{1/5} f_2^{1/5} = 0.53\ [\mathrm{m}]}$$

3. Neue Schätzung von Re: $$\mathrm{Re}_2 = \frac{4Q_2}{\pi D \nu} = 6.7 \times 10^4$$

Iterationsschritt 3:

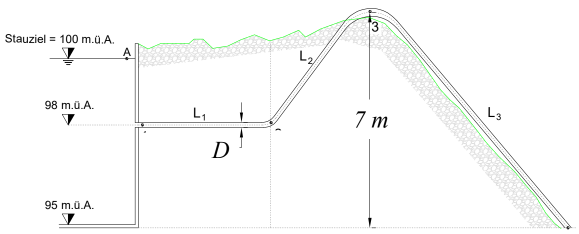
1. Neue Schätzung von f: $$\left.\begin{array}{l} k_s/D = 0.00005/0.53 = 0.0001 \\ \mathrm{Re}_1 = 6.7 \times 10^4 \end{array}\right\} \boxed{f_2 = 0.02}$$ → Lösung konvergiert!

Strömungsregime: glatt turbulent

40

Bsp 7. Rohrströmung

Siphon: Ein Rohr, das dazu dient, Flüssigkeit von einem Reservoir nach oben und dann von selbst auf ein niedrigeres Niveau zu befördern. Sobald die Flüssigkeit in die Röhre gedrückt wurde, typischerweise durch Saugen oder Eintauchen, wird die Strömung ohne Hilfe fortgesetzt



D = 0.5 m
k_s = 0.00015 m
L_1 = L_2 = 4 m, L_3 = 8m

Fall 1: Alle kleineren Energieverluste werden vernachlässigt und die betrachtete Flüssigkeit ist Wasser bei 20°C.

1) Bestimmen Sie den Abfluss *Q*, den Darcy-Weisbach Reibungskoeffizienten f, und das Strömungsregime.
2) Zeichnen Sie die Energielinie und die Drucklinie. Leiten Sie von beiden die Entwicklung des Druckes entlang der Leitung ab.
3) Wo tritt der Mindestdruck in der Rohrleitung auf und was ist sein Wert?
4) Besteht an dieser Stelle Kavitationsgefahr?

Bsp 7. Rohrströmung: Lösung

1) Bestimmen Sie den Abfluss Q, den Darcy-Weisbach Reibungskoeffizienten f, und das Strömungsregime.

- Energiebudget zwischen der freien Oberfläche im Reservoir und dem Ausgang des Siphons:

$$h_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{U_1^2}{2g}} = h_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{U_2^2}{2g} + h_r$$

$$\downarrow$$

$$\frac{U_2^2}{2g} = \frac{\Delta h}{\left(1 + f\frac{\Delta l}{D}\right)}$$

$$\downarrow$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{2g\Delta h}{1 + f\frac{\Delta l}{D}}\right)^{1/2}$$

$$\begin{cases} \Delta h = h_1 - h_2 = 5\text{m} \\ p_1 = p_2 = p_a \\ U_1 = 0 \\ U_2 = U = Q/S \\ h_r = f\dfrac{\Delta l}{D}\dfrac{U^2}{2g} \end{cases}$$

- Der Darcy-Weisbach-Reibungskoeffizient muss durch Iteration bestimmt werden. Achtung: Das iterative Vorgehen ist für ein Rohrsystem etwas anders als für ein Einzelrohr.

Bsp 7. Rohrströmung: Lösung

Lösung ähnlich wie im Beispiel 2 von TH_Pipeflow beschrieben

Wasser bei 20°C: $\nu = 1\text{x}10^{-6}$ [m² s⁻¹]

D, h_r, k_s, ν bekannt → Q, U, f, Re zu ermitteln

Iterationsschritt 1:

1. Erste Schätzung von f: $k_s/D = 0.00015/0.5 = 0.0003$; Re ist unbekannt → f_l = 0.017 (siehe Bsp 5. Rohrströmung)
2. Erste Schätzung von Q von der Darcy-Weisbach Gleichung:

$$\boxed{Q = \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{2g\Delta h}{1+f\dfrac{\Delta l}{D}}\right)^{1/2} = 1.57\ [\text{m}^3\ \text{s}^{-1}]}$$

3. Erste Schätzung von Re: $\mathrm{Re}_1 = \dfrac{4Q_1}{\pi D\nu} = 4.0 \text{ x } 10^6$

Iterationsschritt 2:

1. Neue Schätzung von f: $k_s/D = 0.00015/0.5 = 0.0003$; $\mathrm{Re}_1 = 4.0 \text{ x } 10^6$ → $\boxed{f_l = 0.017}$ → Lösung konvergiert!

Strömungsregime sehr nahe an rau turbulent, was impliziert, dass f nur von k_s/D abhängt.

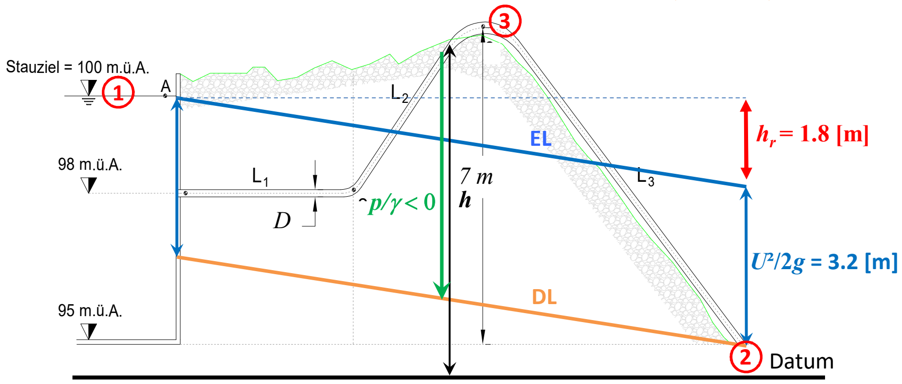
43

Bsp 7. Rohrströmung: Lösung

2) Zeichnen Sie die Energielinie und die Drucklinie. Leiten Sie von beiden die Entwicklung des Druckes entlang der Leitung ab.

EL = Energielinie, $E = h + p/\gamma + U^2/2$

DL = Drucklinie, $p^*/\gamma = h + p/\gamma$



Der relative Druck (in Bezug auf den atmosphärischen Druck) ist negativ im gesamten Siphon.

44

Bsp 7. Rohrströmung: Lösung

3) Wo tritt der Mindestdruck in der Rohrleitung auf und was ist sein Wert?

Der minimale relative Druck tritt am höchsten Punkt des Siphons auf. Es wird gefunden, indem man ein Energiebudget zwischen der freien Oberfläche im Reservoir und diesem Punkt erstellt:

$$h_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{U_1^2}{2g}} = h_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} + h_{r,1-3} \longrightarrow \frac{p_3}{\gamma} = h_1 - h_3 - \frac{U^2}{2g}\left(1 + f\frac{\Delta l_{1-3}}{D}\right) = -6.1 \text{ [m]}$$

4) Besteht an dieser Stelle Kavitationsgefahr?

Der absolute Druck ist gegeben durch: $\frac{p_{abs}}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{p}{\gamma} = \frac{1.013\text{x}10^5}{9.81\text{x}1000} + \frac{p}{\gamma} \approx 10 + \frac{p}{\gamma} \rightarrow p_{abs,min} = 3.9$ [m]

Wobei $p_a = 1.013 \times 10^5$ [N m^{-3}] der normale atmosphärische Druck ist.

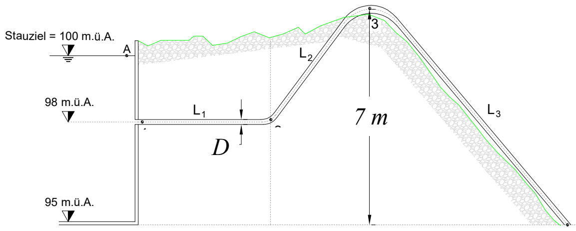
Als Faustregel sollte der relative Druck p/γ größer als -7 [m] sein, oder der absolute Druck p_{abs}/γ sollte größer als 3 [m] sein. Dieser Wert ist erforderlich, da der berechnete Druck:

- **Höhere Geschwindigkeiten können lokal auftreten (zum Beispiel aufgrund von 3D-Effekten in der Kurve), was zu einem niedrigeren Druck führt.**
- **turbulente Fluktuationen, die auch zu höheren Geschwindigkeiten und niedrigeren Drücken führen können, nicht berücksichtigt.**

45

Bsp 8. Rohrströmung

Siphon: Ein Rohr, das dazu dient, Flüssigkeit von einem Reservoir nach oben und dann von selbst auf ein niedrigeres Niveau zu befördern. Sobald die Flüssigkeit in die Röhre gedrückt wurde, typischerweise durch Saugen oder Eintauchen, wird die Strömung ohne Hilfe fortgesetzt



D = 0.5 m
k_s = 0.00015 m
$L_1 = L_2$ = 4 m, L_3 = 8m

Fall 2: Geringe Energieverluste treten am Rohreinlauf (K = 0,2) und in den beiden Bögen (K = 0,3 für jeden Bogen) auf. Die betrachtete Flüssigkeit ist Wasser bei 20°C.

1) Bestimmen Sie den Abfluss *Q*, den Darcy-Weisbach Reibungskoeffizienten f, und das Strömungsregime.
2) Zeichnen Sie die Energielinie und die Drucklinie. Leiten Sie von beiden die Entwicklung des Druckes entlang der Leitung ab.
3) Wo tritt der Mindestdruck in der Rohrleitung auf und was ist sein Wert?
4) Besteht an dieser Stelle Kavitationsgefahr?

46

Bsp 8. Rohrströmung: Lösung

1) Bestimmen Sie den Abfluss Q, den Darcy-Weisbach Reibungskoeffizienten f, und das Strömungsregime.

- Energiebudget zwischen der freien Oberfläche im Reservoir und dem Ausgang des Siphons:

$$h_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{U_1^2}{2g}} = h_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{U_2^2}{2g} + h_r + \sum h_m$$

$$\downarrow$$

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{\Delta h}{1 + f\dfrac{\Delta l}{D} + K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend,1}} + K_{\text{bend,2}}}$$

$$\downarrow$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{2g\Delta h}{1 + f\dfrac{\Delta l}{D} + K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend,1}} + K_{\text{bend,2}}}\right)^{1/2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta h = h_1 - h_2 = 5\,\text{m} \\ p_1 = p_2 = p_a \\ U_1 = 0 \\ U_2 = U = Q/S \\ h_r = f\dfrac{\Delta l}{D}\dfrac{U^2}{2g} \\ \sum h_m = \left(K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend,1}} + K_{\text{bend,2}}\right)\dfrac{U^2}{2g} \end{array}\right.$$

- Der Darcy-Weisbach-Reibungskoeffizient muss durch Iteration bestimmt werden. Achtung: Das iterative Vorgehen ist für ein Rohrsystem etwas anders als für ein Einzelrohr.

Bsp 8. Rohrströmung: Lösung

Lösung ähnlich wie im Beispiel 2 von TH_Pipeflow beschrieben

Wasser bei 20°C: $\nu = 1\text{x}10^{-6}$ [$m^2\ s^{-1}$]

$D,\ h_r,\ k_s,\ \nu$ bekannt → $Q,\ U,\ f,\ Re$ zu ermitteln

Iterationsschritt 1:

1. Erste Schätzung von f: $k_s/D = 0.00015/0.5 = 0.0003$, Re ist unbekannt → f_1 = 0.017 (siehe Bsp 5. Rohrströmung)

2. Erste Schätzung von Q von der Darcy-Weisbach Gleichung:

$$\boxed{Q = \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{2g\Delta h}{1 + f\dfrac{\Delta l}{D} + K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend,1}} + K_{\text{bend,2}}}\right)^{1/2} = 1.27\ [\text{m}^3\ \text{s}^{-1}]}$$

3. Erste Schätzung von Re: $\mathrm{Re}_1 = \dfrac{4Q_1}{\pi D \nu} = 3.2 \text{ x } 10^6$

Iterationsschritt 2:

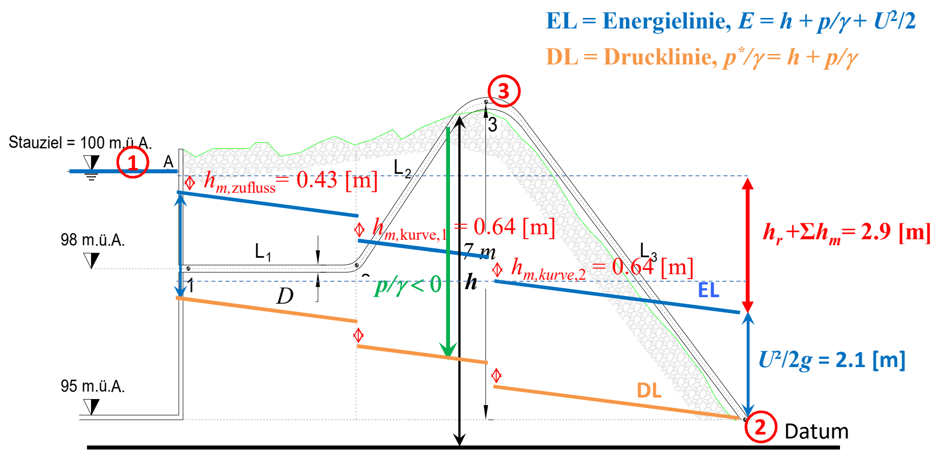
1. Neue Schätzung von f: $k_s/D = 0.00015/0.5 = 0.0003$, $\mathrm{Re}_1 = 3.2 \text{ x } 10^6$ → $\boxed{f_1 = 0.017}$ → Lösung konvergiert!

Strömungsregime sehr nahe an rau turbulent, was impliziert, dass f nur von k_s/D abhängt.

48

Bsp 8. Rohrströmung: Lösung

2) Zeichnen Sie die Energielinie und die Drucklinie. Leiten Sie von beiden die Entwicklung des Druckes entlang der Leitung ab.



Der relative Druck (in Bezug auf den atmosphärischen Druck) ist negativ im gesamten Siphon.

49

Bsp 8. Rohrströmung: Lösung

3) Wo tritt der Mindestdruck in der Rohrleitung auf und was ist sein Wert?

Der minimale relative Druck tritt am höchsten Punkt des Siphons auf. Es wird gefunden, indem man ein Energiebudget zwischen der freien Oberfläche im Reservoir und diesem Punkt erstellt:

$$h_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{U_1^2}{2g}} = h_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + h_{r,1-3} + \left(K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend},1} + K_{\text{bend},2}\right)\frac{U^2}{2g}$$

$$\rightarrow \quad \frac{p_3}{\gamma} = h_1 - h_3 - \frac{U^2}{2g}\left(1 + f\frac{\Delta l_{1-3}}{D} + K_{\text{inflow}} + K_{\text{bend},1} + K_{\text{bend},2}\right) \quad = -6.4 \text{ [m]}$$

Man beachte, dass die konservativste Wert des Mindestdrucks erhalten wird, indem auch die geringen Energieverluste in der zweiten Biegung berücksichtigt werden.

4) Besteht an dieser Stelle Kavitationsgefahr?

Der absolute Druck ist gegeben durch: $\frac{p_{abs}}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{p}{\gamma} = \frac{1.013\text{x}10^5}{9.81\text{x}1000} + \frac{p}{\gamma} \approx 10 + \frac{p}{\gamma}$ → $p_{abs,min}$ = 3.6 [m]

Wobei p_a = 1.013 x 10^5 [N m^{-3}] der normale atmosphärische Druck ist.

Unter Berücksichtigung der geringen Energieverluste erhöht sich in diesem Fall das Kavitationsrisiko leicht. Die Faustregel, dass p/γ größer sein sollte als -7 [m], ist immer noch marginal eingehalten, und das Kavitationsrisiko kann nicht vernachlässigt werden.