TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Physik für Maschinenbau

Vorlesung 311.123 Wintersemester 2019/20

Univ.-Prof. Dipl. Phys. Dr.-Ing. Andreas Otto

Wien, 26.11.2019

007

Also, welche Geschwindigkeit braucht Bond zum Zeitpunkt des Absprungs?

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

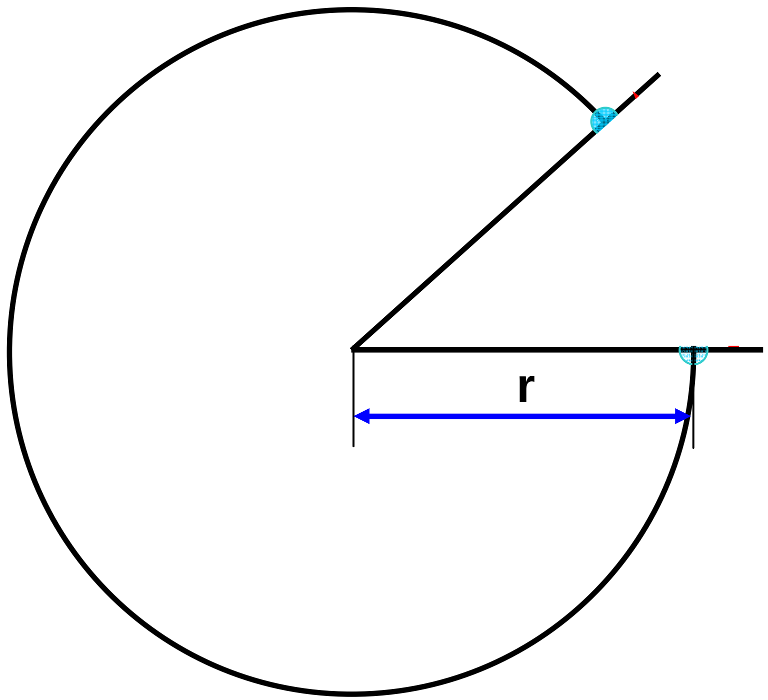
Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

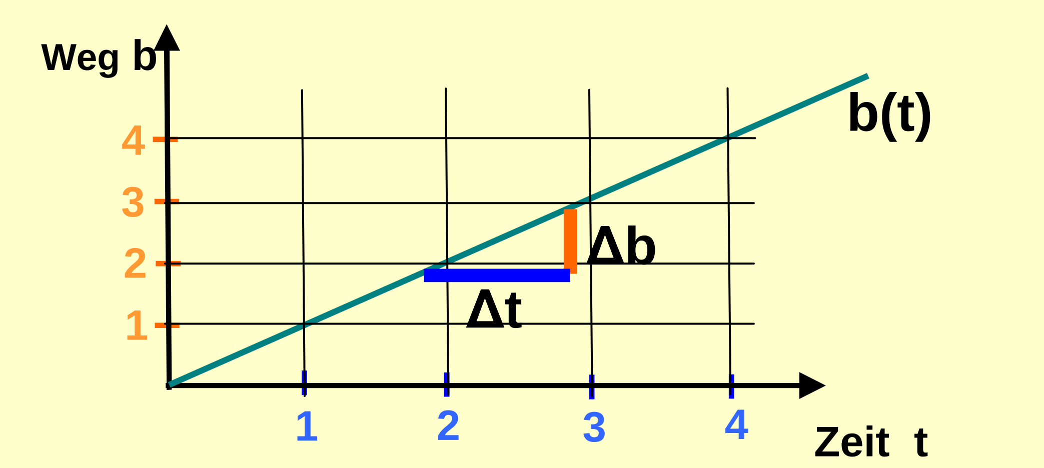
Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Spezialfall Kreisbewegung



Wie bei der gleichförmigen geradlinigen Bewegung kann auch die gleichförmige Kreisbewegung in einem Weg-Zeit Diagramm dargestellt werden, wobei der Weg als Bogenlänge erscheint.

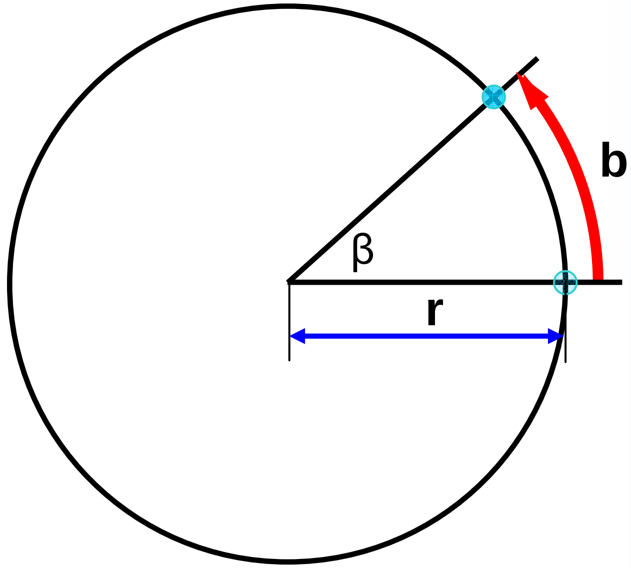


Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt, wie dort, konstant.

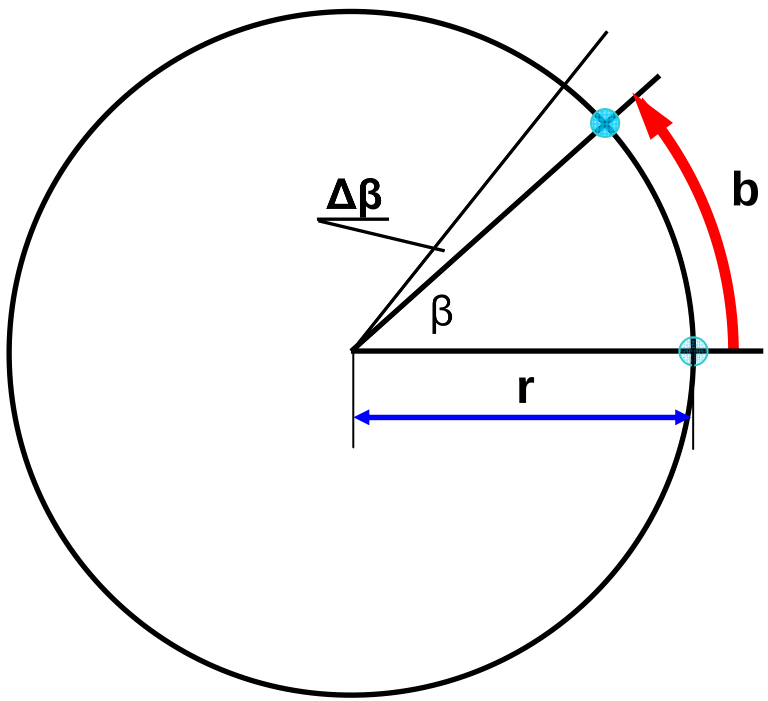
Hier liegt aber eine permanente Richtungsänderung vor.

Spezialfall Kreisbewegung

Zufolge der Richtungsänderung, lässt sich der Ort, den der bewegte Massenpunkt nach einer gewissen Zeit erreicht hat, nicht mehr auf die gleiche einfache Art errechnen. Die spezifische Eigenschaft der Kreisbewegung, die jeweilige Rückkehr zum Ausgangspunkt nach einer Weglänge von $2 * r * \pi$, ermöglicht aber die mathematische Erfassung mittels Winkelfunktion und mit Einführung der Winkelgeschwindigkeit eine zur gleichförmigen geradlinigen Bewegung in Bereichen analoge Erfassung der Bewegung.

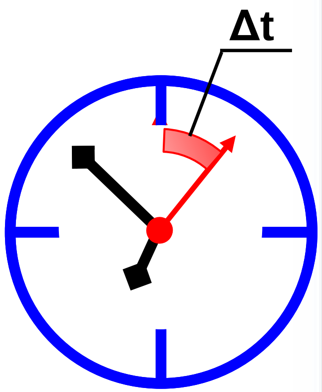


Spezialfall Kreisbewegung



Stellt man den Bezug zwischen Winkel-änderung und verstrichener Zeit her, erhält man eine charakteristische Größe zur Beschreibung der Rotationsbewe-gung – die Winkelgeschwindigkeit …

$$\boxed{\omega = \Delta\beta/\Delta t \quad [\mathrm{rad/s}]}$$

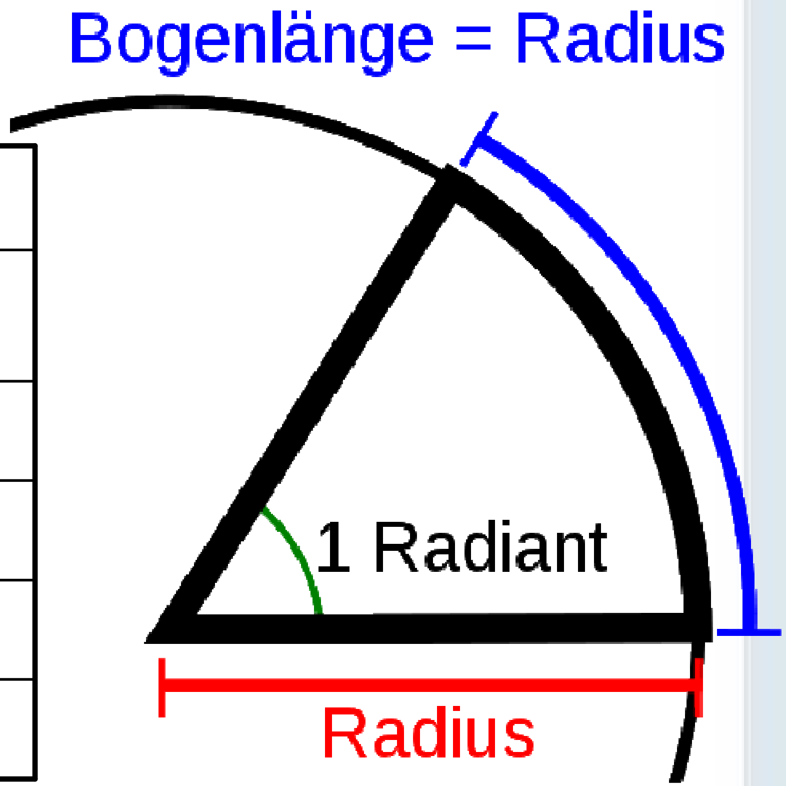


mittlere Winkelgeschwindigkeit im kleinen Zeitintervall **Δt**

(bei konstanter Winkelgeschwindigkeit und fixer Drehachse)

Radiant ist eine dimensionslose kohärente abgeleitete SI Einheit für ebene Winkel, bzw. Drehwinkel.

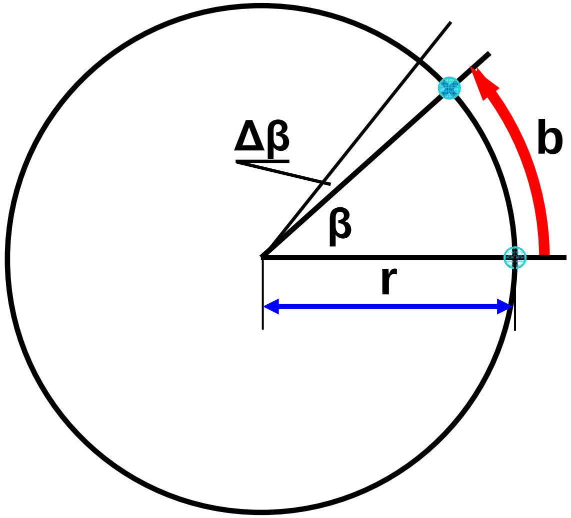
Beschriebene Größe	**Ebener Winkel**
Größensymbol	**α, β, γ, δ, …**
Dimensionssymbol	**dimensionslos**
Einheit	**1 rad = 1m/m = 1**
Einheitenzeichen	**rad**
Einheitenname	**Radiant**



$$1\,\mathrm{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}29577951^\circ$$

Der volle Kreis ist demnach 2π rad.

Spezialfall Kreisbewegung



Ist die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant, sondern Veränderungen unterworfen, so führt der Grenzübergang für Δt gegen 0 auf die momentane Winkelgeschwindigkeit:

$$\boxed{\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\beta/\Delta t = d\beta/dt \qquad [\mathrm{rad/s}]}$$

Gegenüberstellung Weg-Zeit-Gesetz

Geradlinige Bewegung

Beschleunigung konstant

$$v(t) = v(0) + a*t$$

$$s(t) = s(0) + v(0)*t + (a/2)*t^2$$

Rotationsbewegung

Winkelbeschleunigung konstant

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha*t$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0)*t + (\alpha/2)*t^2$$

007


Was würden Sie an Stelle von 007 noch berechnen wollen,
bevor Sie losfahren ? …

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

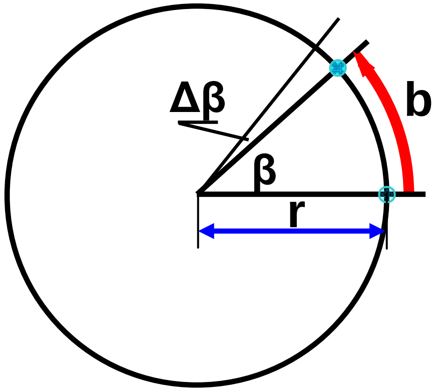
Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

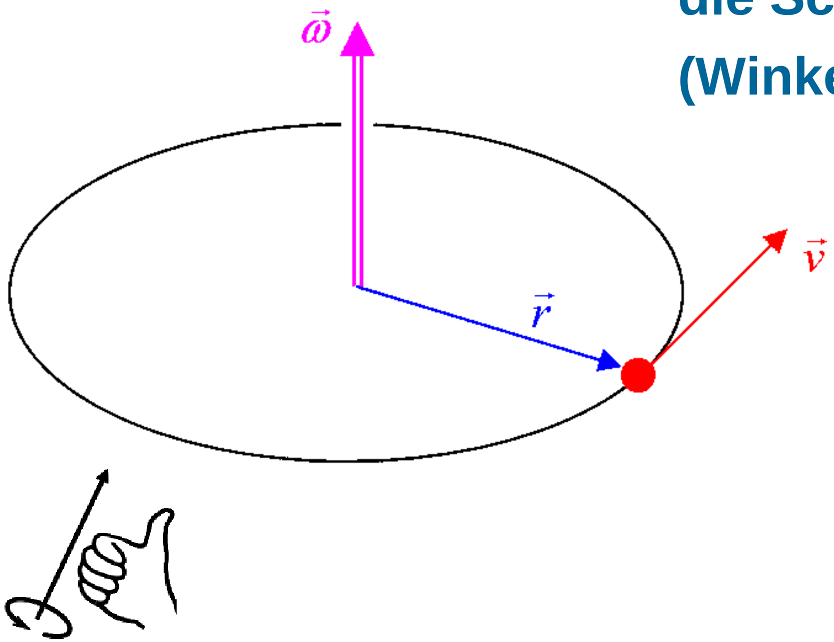
007

007

Spezialfall Kreisbewegung



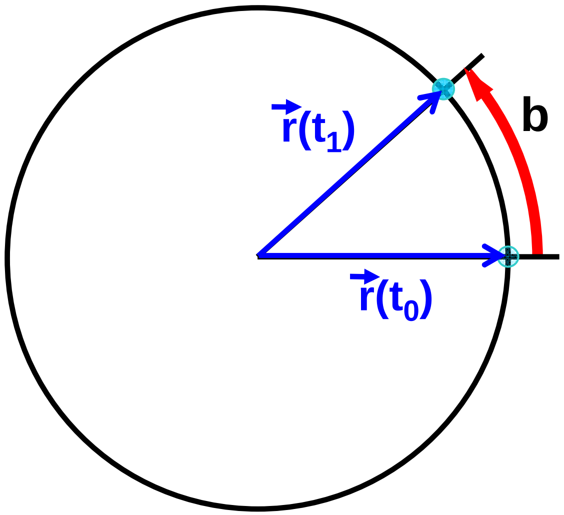
Geschwindigkeit hat eine Richtung, so auch die Winkelgeschwindigkeit, diese ist ein Pseudovektor, der die Drehachse und die Schnelligkeit der Rotationsbewegung (Winkeländerung) angibt.



Also ist ω vom Radius unabhängig.

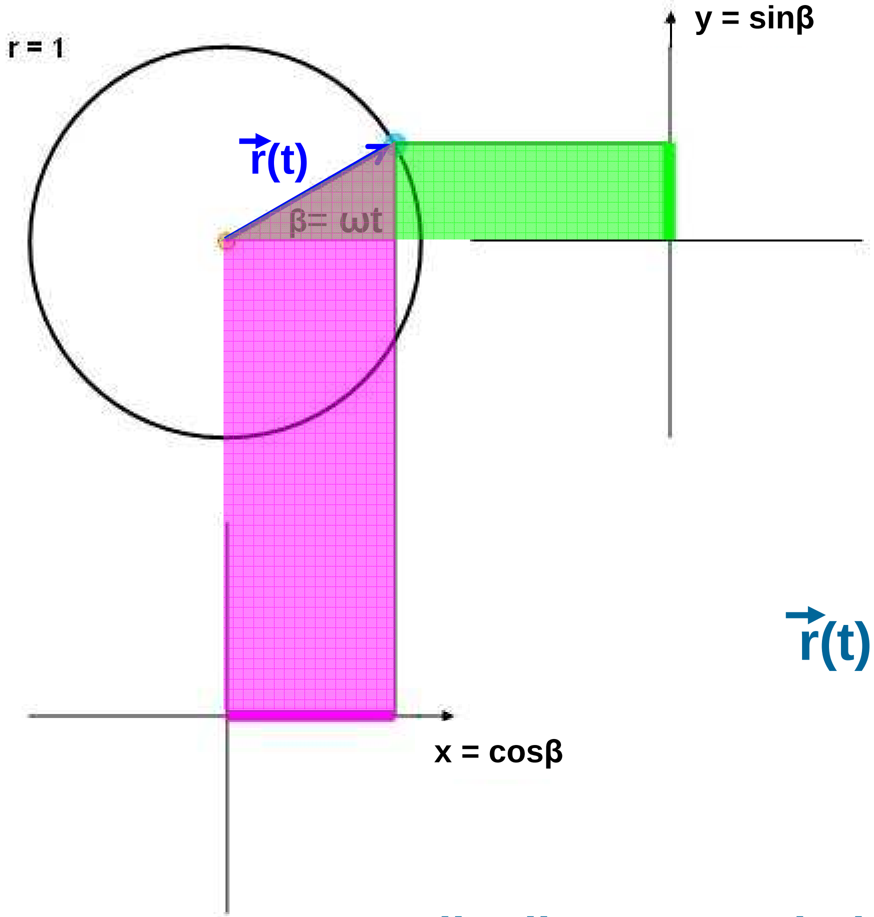
Spezialfall Kreisbewegung

Für den Fall der allgemeinen Bewegung war die Trajektorie (Bahnkurve) die Gesamtheit der Endpunkte der Vektoren $\vec{r}(t)$.



Das gilt natürlich weiter.

Spezialfall Kreisbewegung

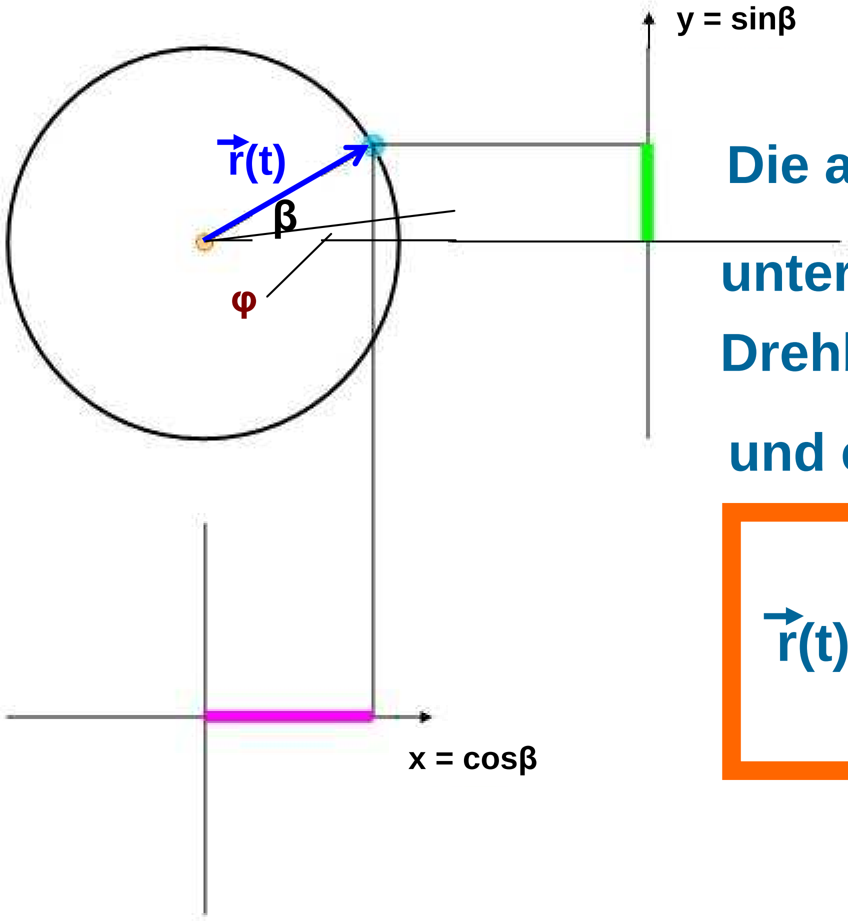


Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit lässt sich für β = ω*t einsetzen und der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ angeben wie folgt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Randbedingungen sind: r = 1 und der Startwinkel ist bei Null °.

Spezialfall Kreisbewegung

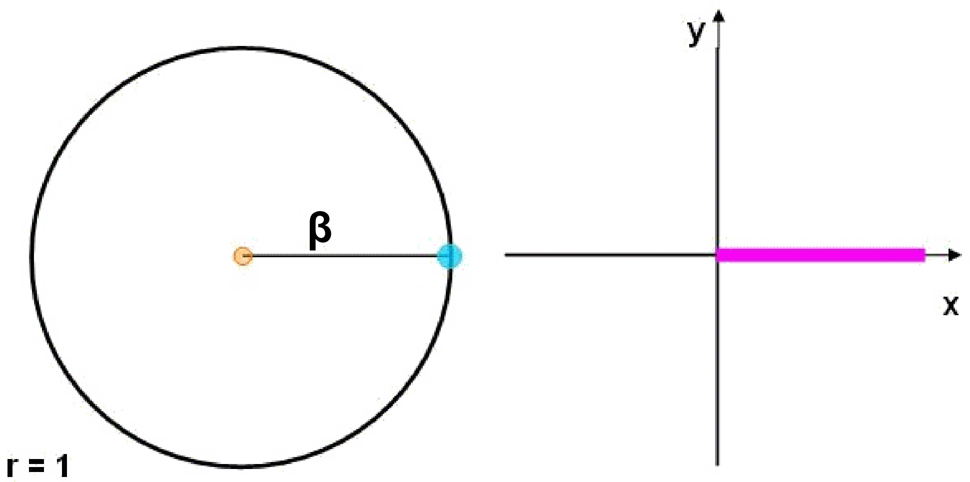


Die allgemeinere Form berücksichtigt unterschiedliche Radien **r** der Drehbewegung

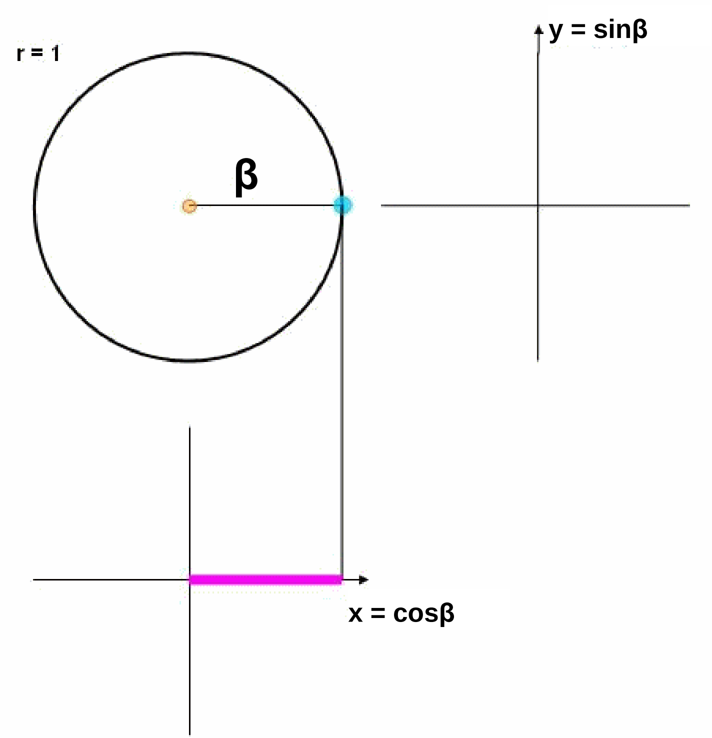
und einen beliebigen Startwinkel **φ**.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\ r \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \end{pmatrix}}$$

Spezialfall Kreisbewegung



Spezialfall Kreisbewegung



Spezialfall Kreisbewegung

Mit konstanter Drehgeschwindigkeit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r*\cos(\omega*t + \varphi) \\ r*\sin(\omega*t + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} - r*\omega*\sin(\omega*t + \varphi) \\ r*\omega*\cos(\omega*t + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} - r*\omega^2*\cos(\omega*t + \varphi) \\ - r*\omega^2*\sin(\omega*t + \varphi) \end{pmatrix}$$

ω = const., aber Beschleunigung $\neq 0$

Vergleich gleichförmige geradlinige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (x_0 + v_x*t) \\ (y_0 + v_y*t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = 0$$

Spezialfall Kreisbewegung

Konstante Drehgeschwindigkeit … keine Änderung des Betrags der Bewegungsgeschwindigkeit

ω = const., aber Beschleunigung $\neq 0$

Hier manifestiert sich die Auswirkung der Lex prima in der mathematischen Erfassung. …

Ohne Einwirkung von Beschleunigung(en) würde sich der betrachtete Massenpunkt geradlinig bewegen.

Spezialfall Kreisbewegung

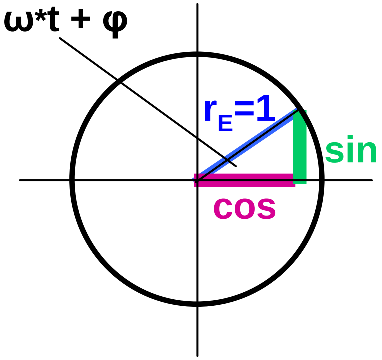
mit konstanter Drehgeschwindigkeit

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\ -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Beschleunigungsvektor bei Rotation mit konstanter Geschwindigkeit

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi))^2 + (r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi))^2}$$

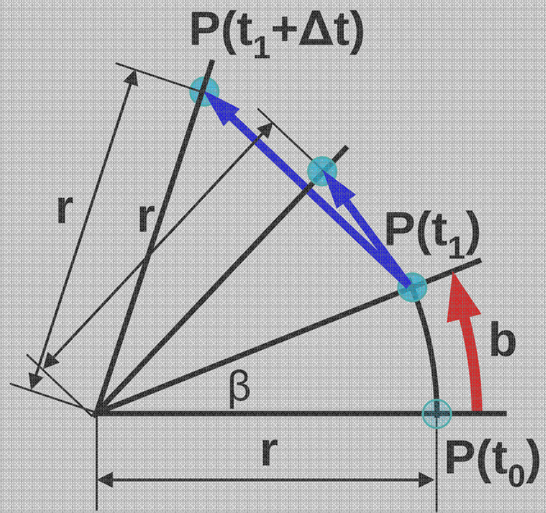
$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{r^2 \cdot \omega^4 \cdot (\underbrace{\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)}_{=1})}$$



$$\boxed{|\vec{a}(t)| = r \cdot \omega^2 \quad \text{… Zentripetalbeschleunigung}}$$

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit



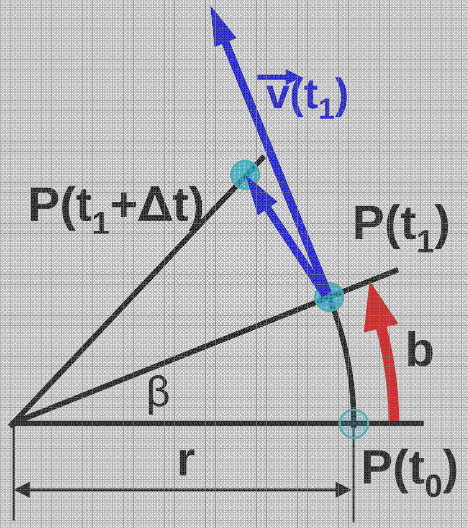
Ermittlung des Geschwindigkeitsvektors bzw. der momentanen Bewegungsrichtung

Betrachtet man die Position des Massenpunkts zum Zeitpunkt t_1 und einem um Δt späteren Zeitpunkt, so hat eine Bewegung, in kürzester Weise charakterisiert durch den blauen Pfeil, stattgefunden. Das hieße entlang einer Sehne des Kreises, auf dessen Umfang sich der Massenpunkt bewegt.

Verringert man nun Δt, so ist der Massenpunkt weniger weit gekommen und der zugehöriger Bewegungsvektor ändert Länge und Lage.

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit



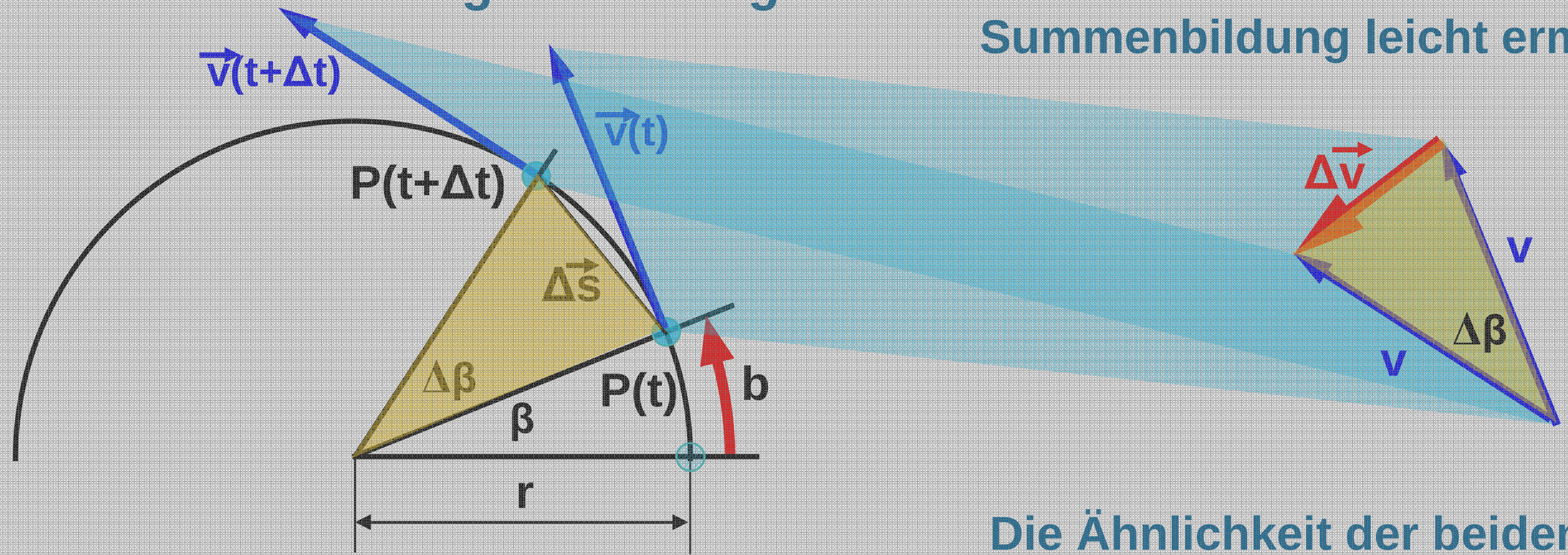
Läßt man nun Δt gegen 0 gehen, dreht sich die Sehne in Richtung Tangente und man gelangt zur momentanen Bewegungsrichtung, die demgemäß in Richtung der Tangente und gleichzeitig des Momentangeschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t_1)$ weist.

Ermittlung des Geschwindigkeitsvektors bzw. der momentanen Bewegungsrichtung

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit

Die Differenz $\Delta\vec{v}$ läßt sich konstruktiv durch vektorielle Summenbildung leicht ermitteln.



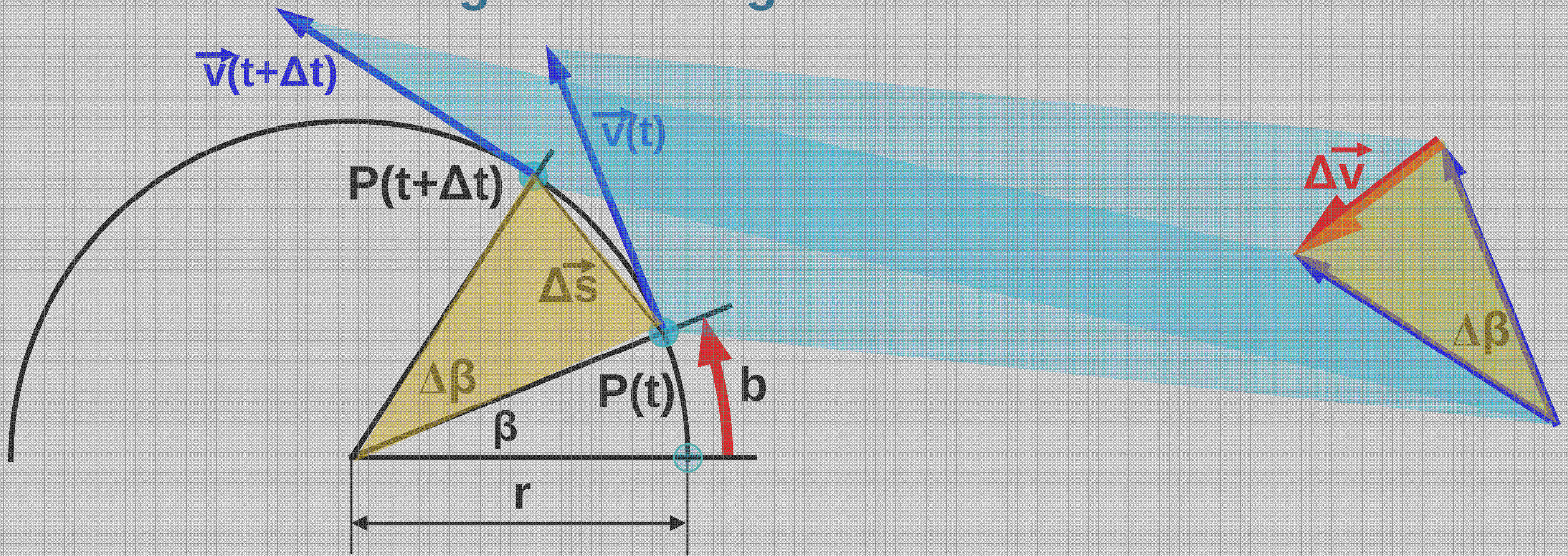
Während des kleinen Zeitabschnitts Δt haben sich sowohl Massenpunkt, wie der Geschwindigkeitsvektor (dessen Richtung sich dabei geändert hat), um den Winkel Δβ weitergedreht.

Die Ähnlichkeit der beiden Drei-ecke erlaubt die Gleichsetzung der beiden Relationen:

$$\Delta s/r = \Delta v/v$$

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit



Für kleine Δt, läßt sich Δs = v*Δt und für Δv = a*Δt setzen. Damit wird aus

Δs/r = Δv/v .....

(v*Δt)/r = (a*Δt)/v

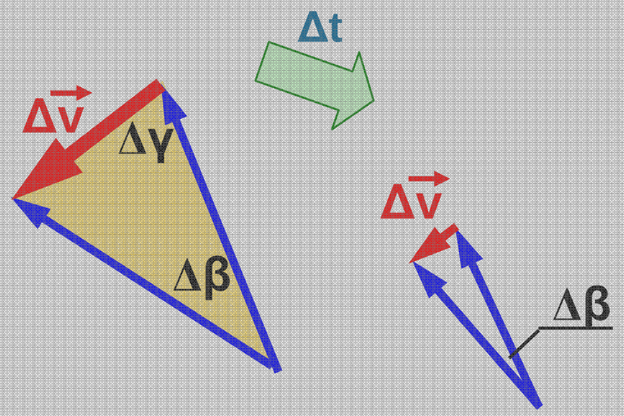
Somit errechnet sich der Betrag der Beschleunigung als:

$a = v^2/r$ und mit $v = \omega r$ schließlich:

$$\boxed{a = \omega^2 * r}$$

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit



Zur Bestimmung der Richtung betrachten wir das obige Dreieck

$$\Delta\gamma = (180 - \Delta\beta)/2$$

$$\Delta\beta \to 0^o \; \ldots\ldots \; \Delta\gamma \to 90^o$$

Mit kleiner werdendem Δt wird entsprechend auch Δβ kleiner, was zum Anwachsen der übrigen beiden Winkel im gleichschenkeligen Dreieck führt. Der Grenzübergang für Δt -> 0 führt zu einem rechten Winkel zwischen tangentialer Geschwindigkeit und zentraler Beschleunigung.

... Zentripetalbeschleunigung

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit

Bewegungsänderungen bestehen aus Beschleunigungen. Diese hängen gemäß Lex Secunda über die Masse mit den einwirkenden Kräften zusammen. Der Spezialfall der Kreisbewegung bildet natürlich keine Ausnahme. So kann die Zentripetalbeschleunigung nur von einer Zentripetalkraft, die an der rotierenden Masse angreift, erzeugt werden.

$$\boxed{F_Z = m * \omega^2 * r}$$

Die Richtung entspricht der Zentripetalbeschleunigung, wie wir sie zuvor hergeleitet haben.

Die vektorielle Darstellung lautet: $\vec{F}_Z = m * \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Spezialfall Kreisbewegung

mit konstanter Drehgeschwindigkeit

Die Gegenkraft des Massenpunktes wird als Zentrifugalkraft bezeichnet (Lex Tertia … Reaktionsprinzip … gleiche Größe – entgegengesetzte Richtung).

$$\vec{F}_{zp} = - \vec{F}_{zf}$$

Zentripetal- und Zentrifugalkraft sind entgegengesetzt gleich groß.

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

007

Diese Seite nicht ausdrucken!

Beispielrechnungen werden nachträglich veröffentlicht

Schwingung

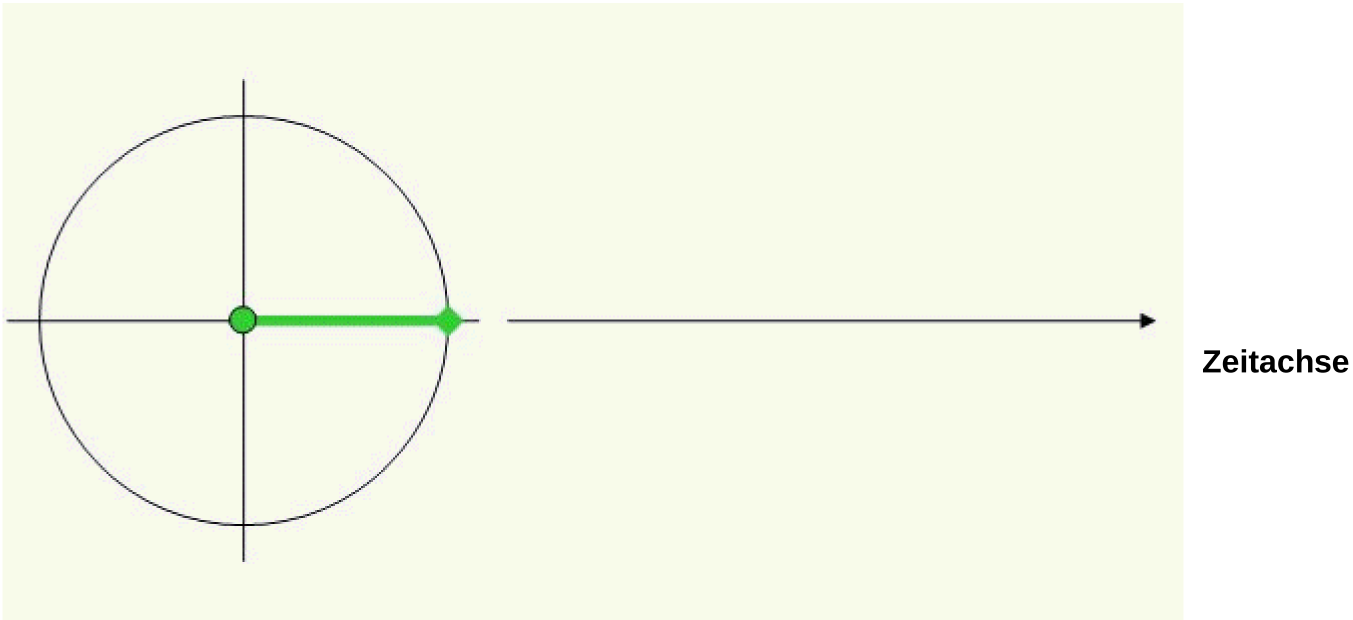
Eine Schwingung (auch Oszillation) bezeichnet den Verlauf der Zustandsänderung in einem physikalisches System, das durch eine Störung aus dem stabilen Gleichgewicht gebracht wird und durch eine rücktreibende Kraft wieder zum Ausgangszustand zurück und dann über diesen hinaus getrieben wird.

Grundsätzlich basiert das Schwingen eines Systems auf der *periodischen Energieumwandlung zwischen zwei Energieformen*. Dabei durchläuft das System wiederholt nach einem festen Zeitintervall den orbitalen Ausgangszustand.

Quelle: wikipedia.org/wiki/Schwingung

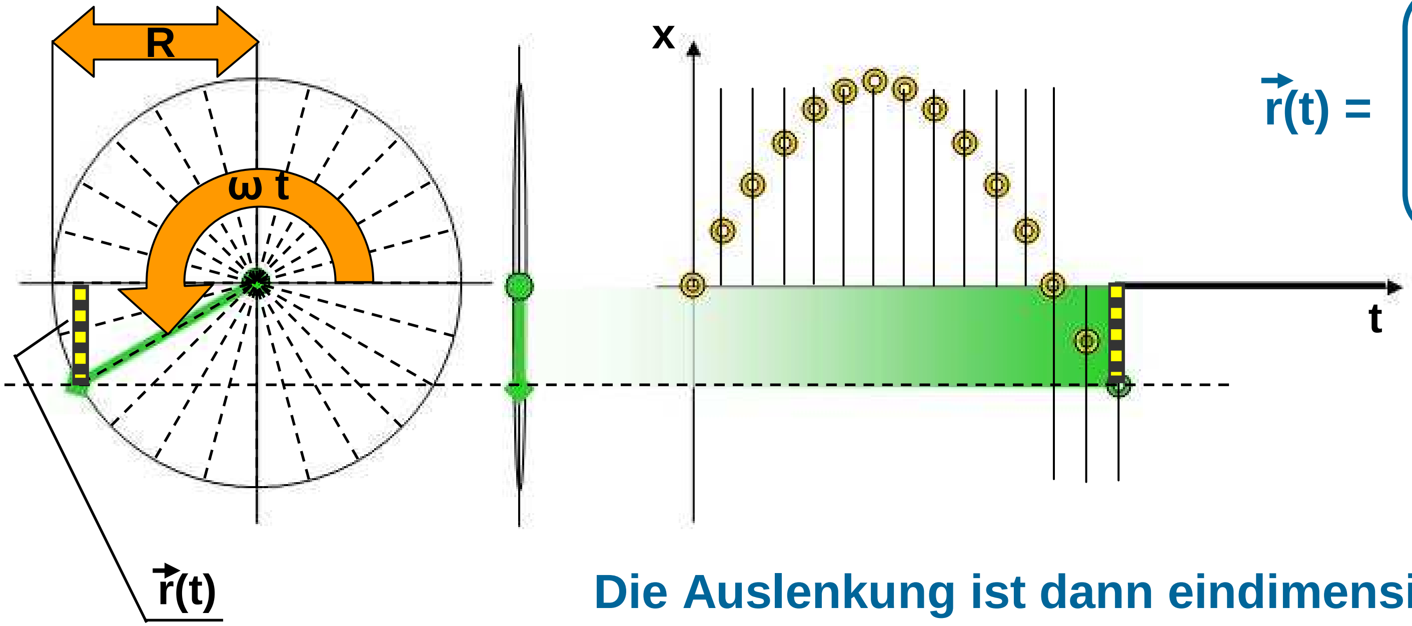
Spezialfall – Harmonische Schwingung

Eine harmonische Schwingung lässt sich als von der Seite gesehene und damit auf eine Dimension reduzierte Kreisbewegung betrachten.



Spezialfall – Harmonische Schwingung

Darstellung der Auslenkung über der Zeitachse.



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R*\sin(\omega*t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Auslenkung ist dann eindimensional – in weiteren Koordinatenrichtungen gleich null.

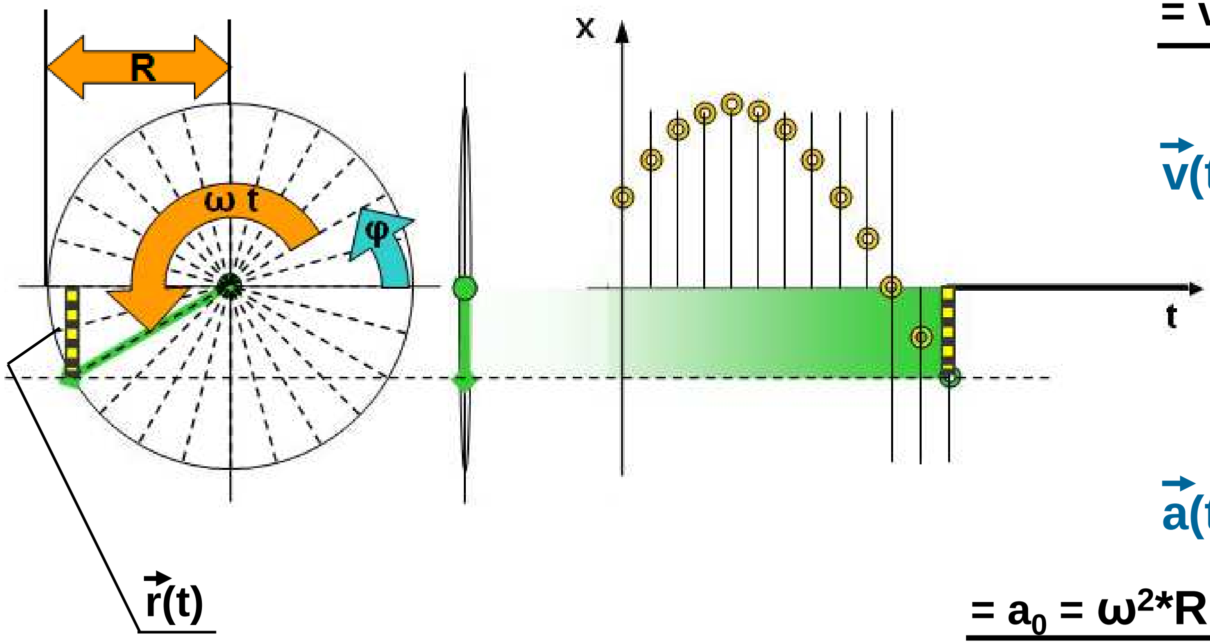
Spezialfall – Harmonische Schwingung

Mit allgemeinem Startwinkel φ:

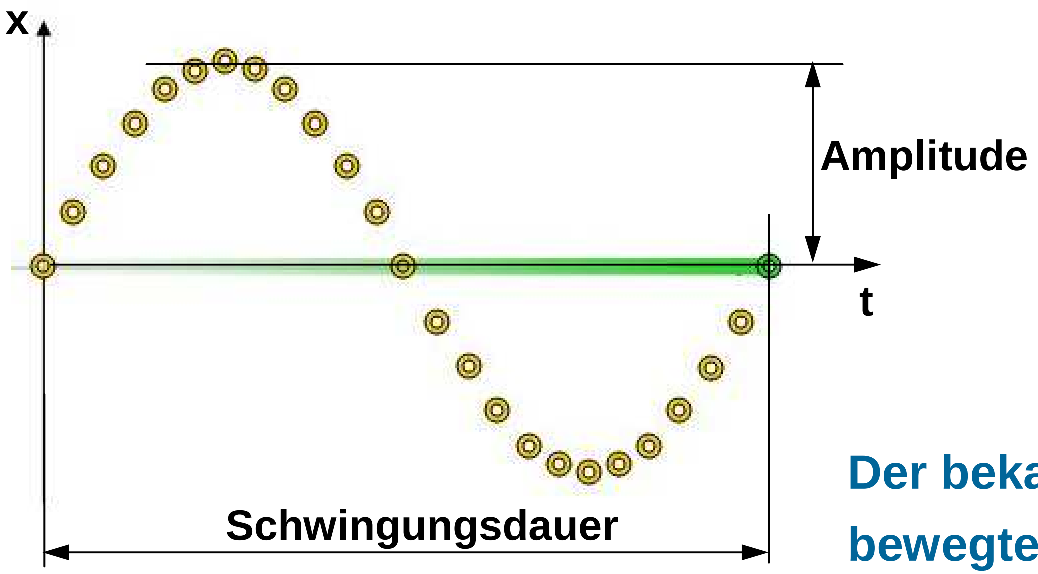
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R*\sin(\omega*t + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{R*\omega}}_{= v_0}*\cos(\omega*t + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\underbrace{\boxed{v_0*\omega}}_{= a_0 = \omega^2*R}*\sin(\omega*t + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Spezialfall – Harmonische Schwingung



$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \boxed{-v_0 * \omega} * \boxed{\sin(\omega * t + \varphi)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \underline{-\omega^2 * R} * \underline{\vec{r}(t)/R} = -\omega^2 * \vec{r}(t)$$

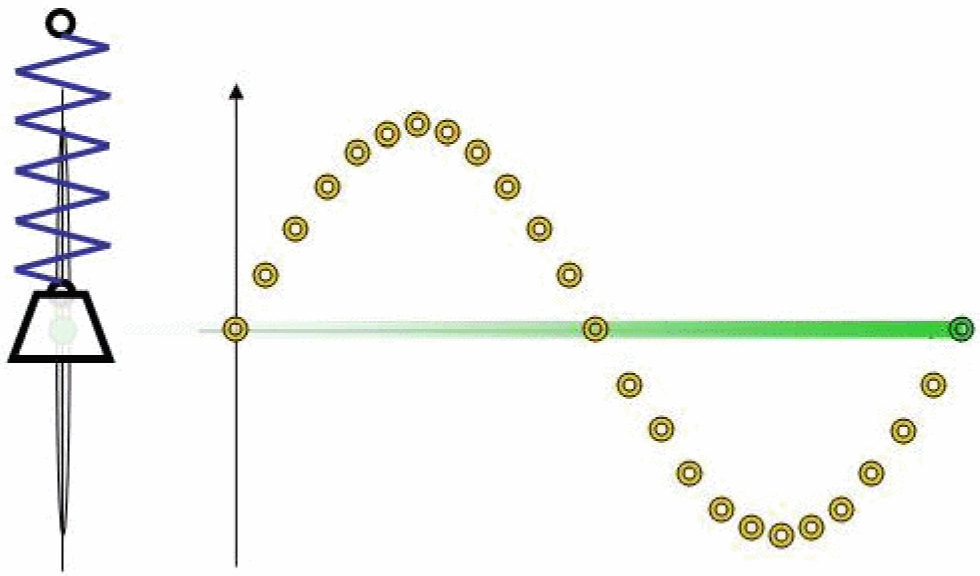
Der bekannte Zusammenhang mit der bewegten Masse und den auftretenden Beschleunigungen führt auf die Kräfte-verhältnisse.

$$\boxed{\vec{F}(t) = m * \vec{a} = -\underbrace{m * \omega^2}_{} * \vec{r}(t) = -\underbrace{D}_{} * \vec{r}(t)}$$

… eine elastische Kraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage

Spezialfall – Harmonische Schwingung

Wird eine solche Rückstellkraft durch eine Feder aufgebracht, muss der zeitliche Verlauf, genau jenem in einer Richtung bei der Rotationsbewegung entsprechen. Die Anforderung an die Federkonstante lautet (wie zuvor hergeleitet): $D = m*\omega^2$ bzw. $\omega = \sqrt{D/m}$ und man erhält die harmonische Schwingung einer ausgelenkten Masse um ihre Ruhelage.



Analog zur Kreisbewegung ist die Schwingungsdauer

$$\boxed{T = 2*\pi/\omega = 2*\pi\sqrt{m/D}}$$

und die Frequenz der Schwingung

$$\boxed{f = 1/T = 1/(2*\pi*\sqrt{m/D})}$$

Bestimmende Größen in Zusammenhang mit Bewegung

Ort **Zeit**	***Ort*** **und** ***Zeit*** **hatten wir heranziehen müssen, um Bewegung überhaupt zu definieren.**
Geschwindigkeit	**Welche Entfernung in welcher Zeit zurückgelegt wird, führte uns auf den Begriff der** ***Geschwindigkeit.***
Beschleunigung	**Da die Geschwindigkeit keine konstante Größe haben muss, wurde auch das Maß für die Änderung der Geschwindigkeit als** ***Beschleunigung*** **festgelegt.**

Bis hierher betreffen die Größen alleine die Bewegung, ohne die auslösenden Ursachen mit einzubeziehen.

Bestimmende Größen in Zusammenhang mit Bewegung

Newton erkannte und beschrieb den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung.

Kinematik → Dynamik

Kraft In Zusammenhang mit den Massen der bewegten Körper und deren Beschleunigung erkennt man ***Kräfte*** als maßgeblich bestimmend.

Bestimmende Größen in Zusammenhang mit Bewegung

Neben den bisher besprochenen, gibt es weitere Größen, denen wir uns zuzuwenden haben.

Der Zusammenhang zwischen Kraft und Masse, sowie Beschleunigung ist Teil der alltäglichen Erfahrungswelt (Auto – Bremskraft). Newton hatte die Kraft aber zunächst als die zeitliche Änderung (Ableitung) des Impulses definiert.

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

… mit $\vec{p} = m*\vec{v}$

Für den Impuls verwendet er gemäß einem Vorschlag von Descartes den Begriff: „Quantitas motus“ – Menge oder Größe der Bewegung.

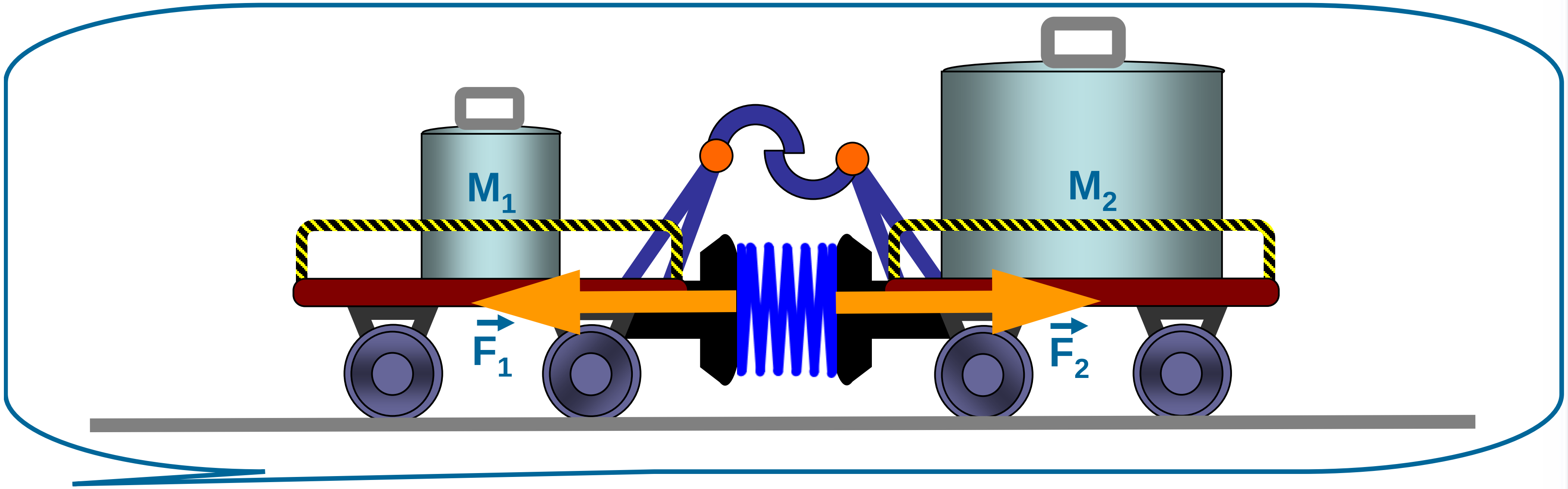
Deswegen wir der Impuls auch Bewegungsgröße genannt.

Kinematik

Für den Impuls wird keine eigene Einheit verwendet, sondern die anschließend erläuterte abgeleitete Einheit:

Physikalische Größe	Impuls
Größensymbol	$\vec{p}$
Dimensionssymbol	$M \cdot L \cdot T^{-1}$
Einheit	$\text{Newton} \cdot s = kg \cdot m \cdot s^{-1}$
Einheitenzeichen	-

Der Impuls $\vec{p}$

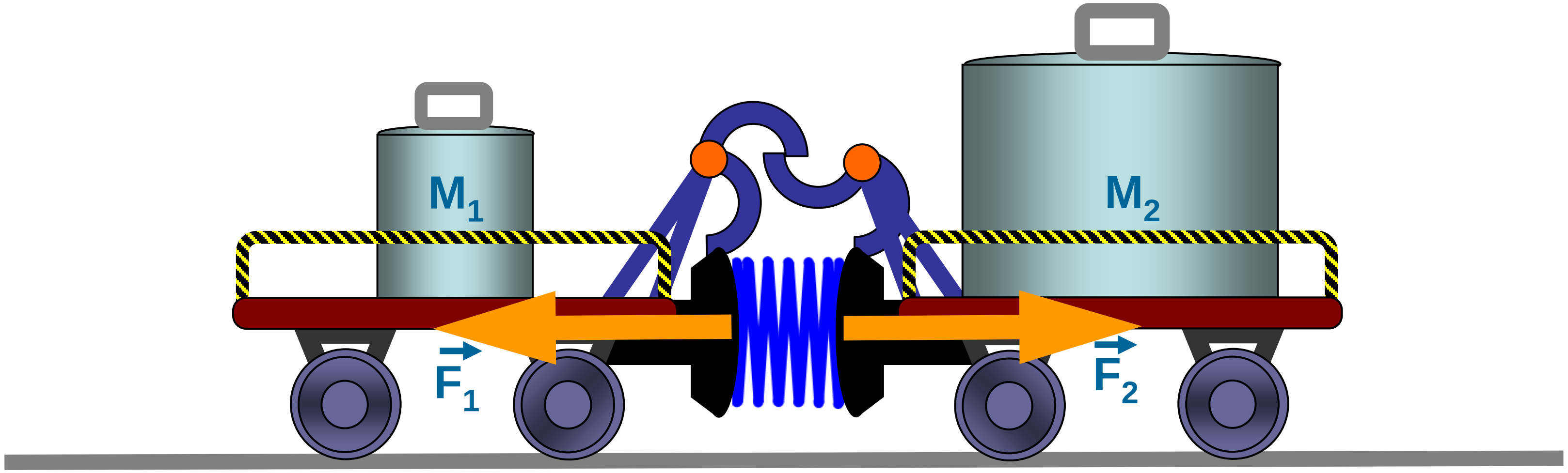


Zur Erläuterung betrachten wir das idealisierte abgeschlossene System ohne Austausch von Wechselwirkungen mit der Umgebung.

Zwei unterschiedlich große Massen M_1 und M_2 sind auf zwei widerstandslos rollenden identischen Wägen geladen.

Eine komprimierte masselose Feder übt nach dem Prinzip von Actio und Reactio gleich große, entgegengesetzte Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ auf die Wägen aus.

Der Impuls $\vec{p}$



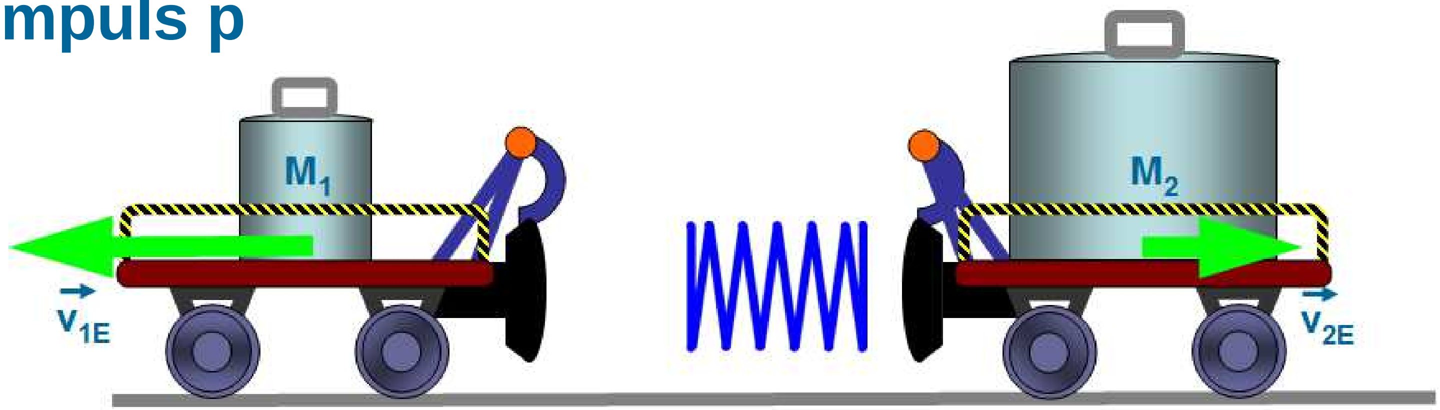
Bei geschlossener Auslösekupplung gibt es keine Bewegung. Somit ist der Gesamtimpuls des Systems $\vec{p}_A = (M_1 + M_2) * \vec{v}_A = 0$ … Index A für Start der Betrachtung

Die Auslösung der Kupplung führt dann dazu, dass die Federkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ die Massen M_1 und M_2 beschleunigen.

$$\vec{F}_1 = - \vec{F}_2$$

Lex Secunda: $M_1 * \vec{a}_1 = - M_2 * \vec{a}_2$

Der Impuls $\vec{p}$



$$\vec{F}_1 = M_1 * \vec{a}_1 \quad = \quad -\vec{F}_2 = -M_2 * \vec{a}_2$$

Da die Momentanbeschleunigung während der Beschleunigungsphase hier nicht von Interesse ist, kann man sich auf Anfangs- und Endzustand beschränken und für die Gesamtbeschleunigung einsetzend schreiben:

$$\vec{F}_1 = M_1 * (\vec{v}_{1E} - \vec{v}_{1A})/t_{A\text{-}E} \quad = \quad -\vec{F}_2 = -M_2 * (\vec{v}_{2E} - \vec{v}_{2A})/t_{A\text{-}E}$$

Die Anfangsgeschwindigkeiten v_{1A} und v_{2A} , waren beide 0. So führt die Multiplikation mit der Zeit $t_{A\text{-}E}$, während der beschleunigt wird, auf:

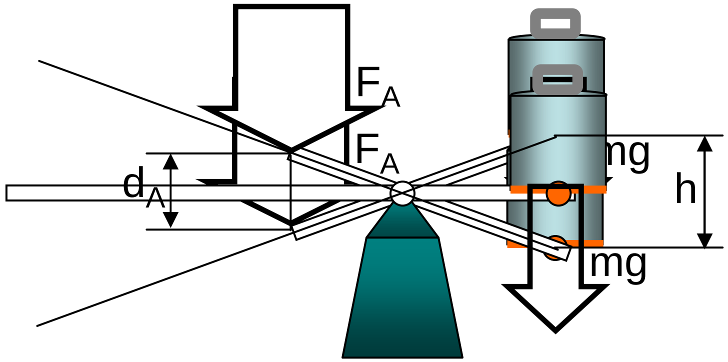
$$M_1 * \vec{v}_{1E} \quad = \quad -M_2 * \vec{v}_{2E}$$

… Impuls des Gesamtsystems $\vec{p}_E = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, mit $\vec{v}_A \neq 0 \neq \vec{v}_{1E}, \vec{v}_{2E}$ ergibt als Summe gegengleicher Impulse $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$, wie zu Anfang, 0.

Arbeit

Bei Anwendung der Hebelgesetze wird das Phänomen Arbeit evident.

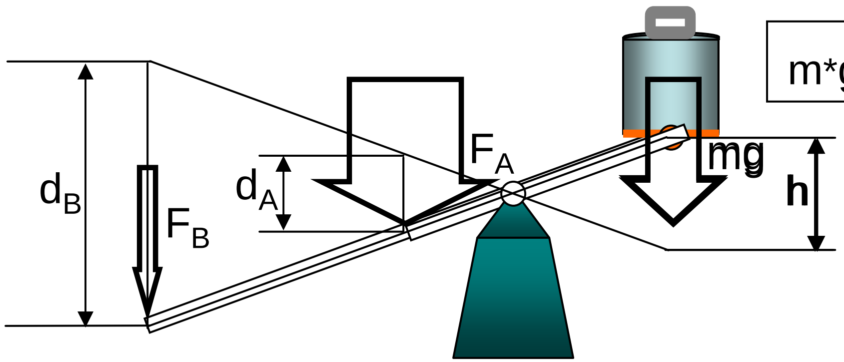
$m*g*h = F_A*d_A$



Arbeit

Bei Anwendung der Hebelgesetze wird das Phänomen Arbeit evident.

$m*g*h = F_A*d_A$



$m*g*h = F_B*d_B$

Die Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Masse m im Gravitationsfeld um die Höhe h anzuheben bleibt unverändert, mit geringer Kraft (F_B) benötigt man einen langen Weg (d_B) und im Falle eines kurzen Wegs (d_A) ist die Kraftaufwendung (F_A) sehr hoch.

Erhaltungsgrößen

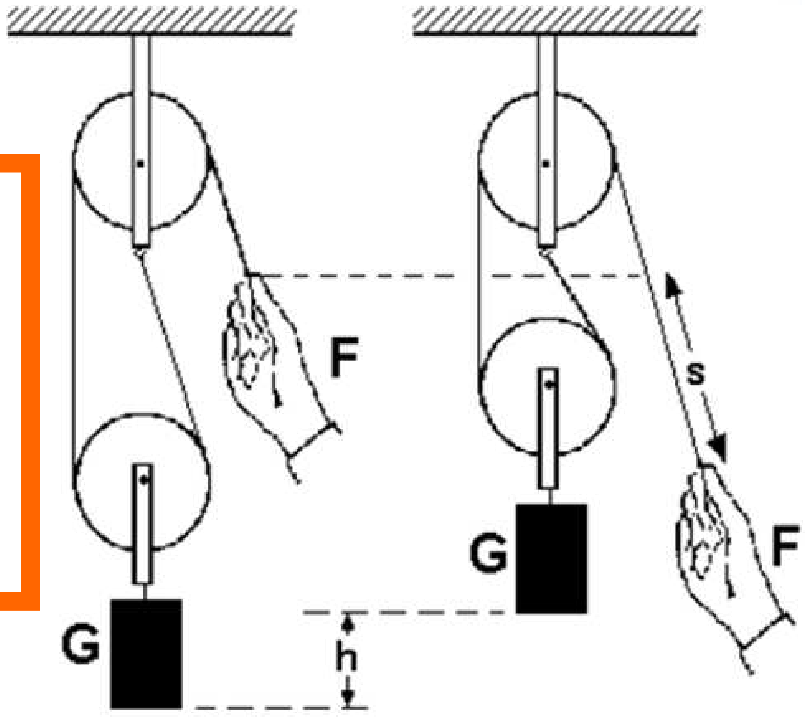
Arbeit

Dieser Umstand ist in der goldenen Regel der Mechanik festgehalten:

Das Produkt aus Kraft und Weg bleibt – abgesehen von Reibungsverlusten – erhalten.

So kann man Kräfte reduzieren, muss das aber mit längeren Wegen kompensieren.

$F = G/2 \quad s = 2 * h$



Flaschenzug

Arbeit - Energie

Um eine Masse auf eine Geschwindigkeit zu beschleunigen, muss Arbeit aufgewendet werden (eine Kraft entlang einer Wegstrecke einwirken).

Aus den bereits hergeleiteten Formeln für $v = a*t + v_0$ und $s = (a/2)*t^2 + v_0*t + s_0$ (wobei durch geeignete Wahl des Ursprungs gilt: $s_0 = 0$), lässt sich durch Umformen schließlich ermitteln $v^2 - v_0^2 = 2a*s$ und mit $v_0 = 0$ für $v^2 = 2*a*s$ oder $v = \sqrt{2*a*s}$.

$$v = \sqrt{2*a*s} = \sqrt{2*F*s/m} = \sqrt{2*W/m} \ \ldots \ \ldots \ \boxed{W = \tfrac{1}{2}*m*v^2 = E_{kin}}$$

$F = a*m \ldots a = F/m$

Diese bewegte Masse beinhaltet dann die dafür aufgewendete Arbeit als kinetische Energie.

Arbeit - Energie

Wirkt in einem Raum auf einen Massenpunkt eine Kraft, die nur vom Ort abhängt, spricht man von einem Kraftfeld. Bei Verschiebung des Massenpunkts von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ muss folgende Arbeit geleistet werden:

$$W_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = \int_{C(\vec{r1}, \vec{r2})} \vec{F}(r)\, d\vec{r}$$

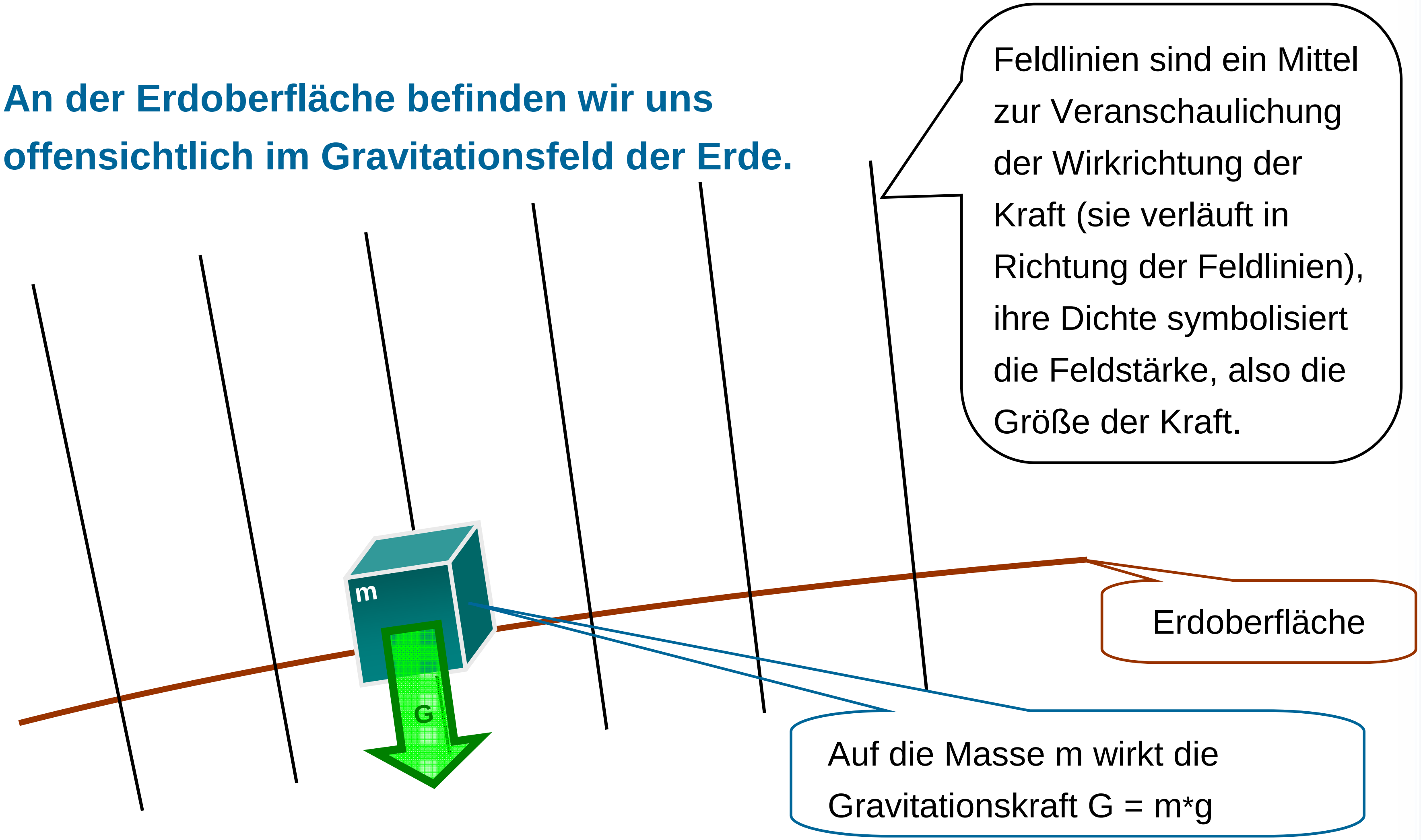
C…Bahnkurve (Trajektorie) zwischen r1 und r2

Im Gravitationsfeld ist diese Arbeit wegunabhängig – man spricht von einem konservativen Kraftfeld.

Beim Anheben eine Körpers mit Masse m nahe der Erdoberfläche entspricht die zu leistende Arbeit W der mit der Höhendifferenz multiplizierten zu überwindenden Kraft, die gemäß Lex Secunda dem Produkt aus Masse und Erdbeschleunigung gleichzusetzen ist.

Arbeit - Energie

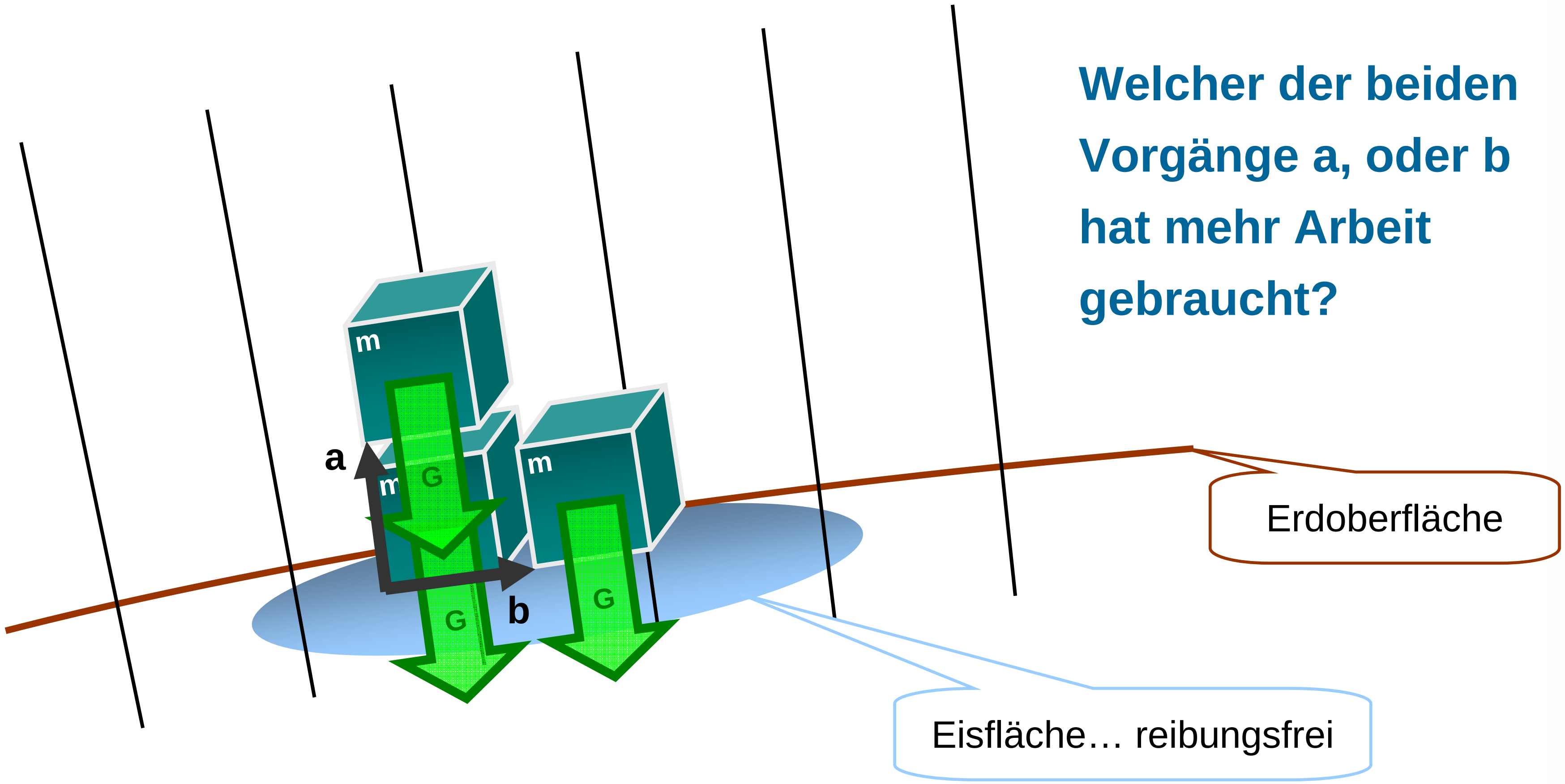
An der Erdoberfläche befinden wir uns offensichtlich im Gravitationsfeld der Erde.



Arbeit - Energie

Vorgang a: Anheben der Masse m auf 1m Höhe

Vorgang b: Horizontales Verschieben der Masse um 1m

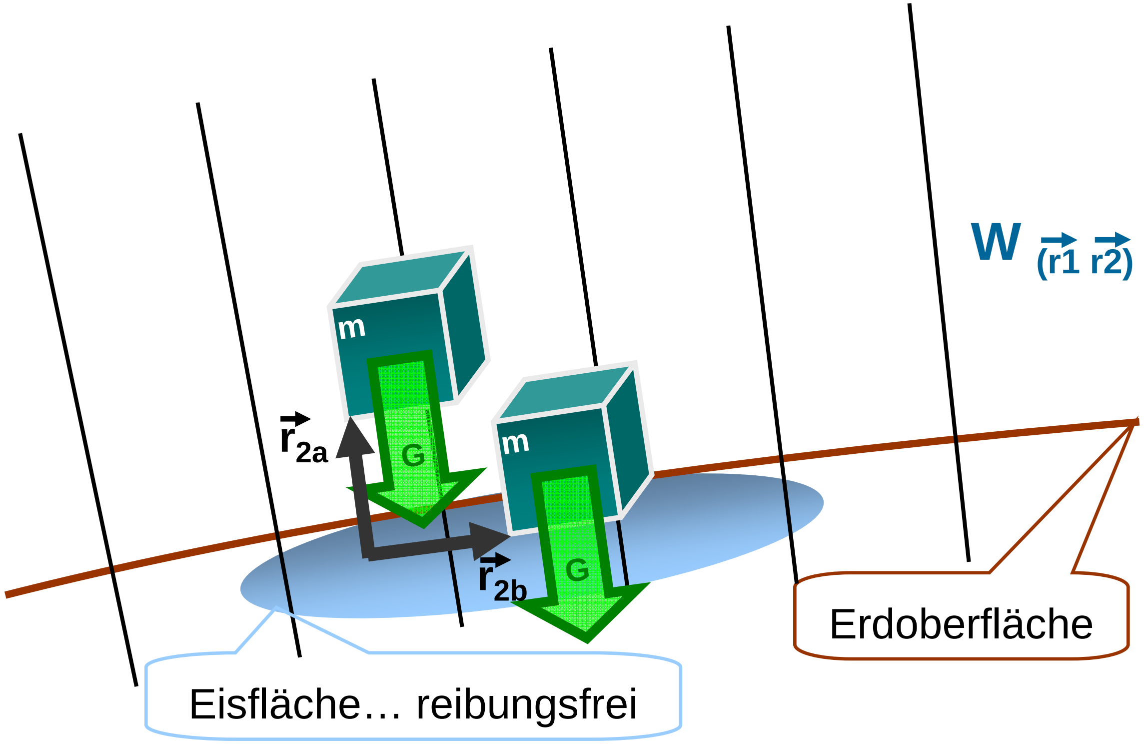


Welcher der beiden Vorgänge a, oder b hat mehr Arbeit gebraucht?

Arbeit - Energie

Vorgang a: Anheben der Masse m auf 1m Höhe

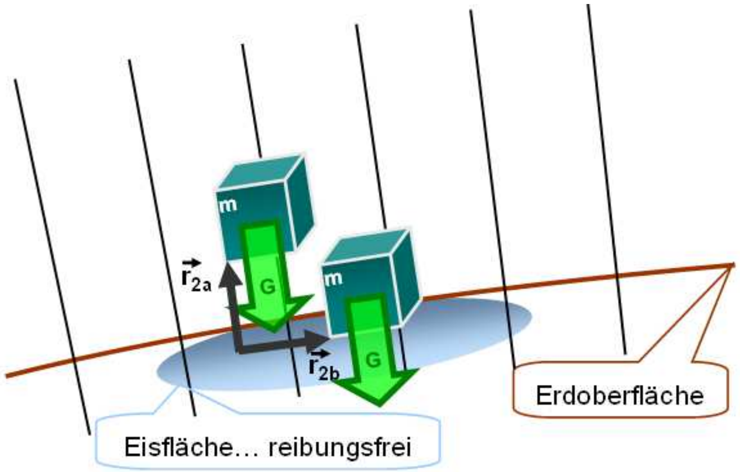
Vorgang b: Horizontales Verschieben der Masse um 1m



$$W_{(\vec{r}1\ \vec{r}2)} = \int_{C(\vec{r}1\ \vec{r}2)} \vec{F}(r)d\vec{r}$$

Zweidimensionale Betrachtung: x-Koordinate horizontal, y-Koordinate vertikal, Ursprung im Startpunkt der Bewegung

Arbeit - Energie



$$W = \int_{r1}^{r2} \vec{F}(r) d\vec{r}$$

In beiden Fällen ist $\vec{F}$ ***(Kraft auf Standfläche, gerichtet entgegen G)*** **näherungsweise konstant und wirkt nur in Richtung y, also $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$ und kann daher vor das Integral gezogen werden.**

Im Fall a ist wegen alleiniger Bewegung in y-Richtung $\int_{r1}^{r2} d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$

und daher $W_a = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = mgh$

Im Fall b ist wegen alleiniger Bewegung in x-Richtung $\int_{r1}^{r2} d\vec{r} = \begin{pmatrix} r2_x - r1_x \\ 0 \end{pmatrix}$

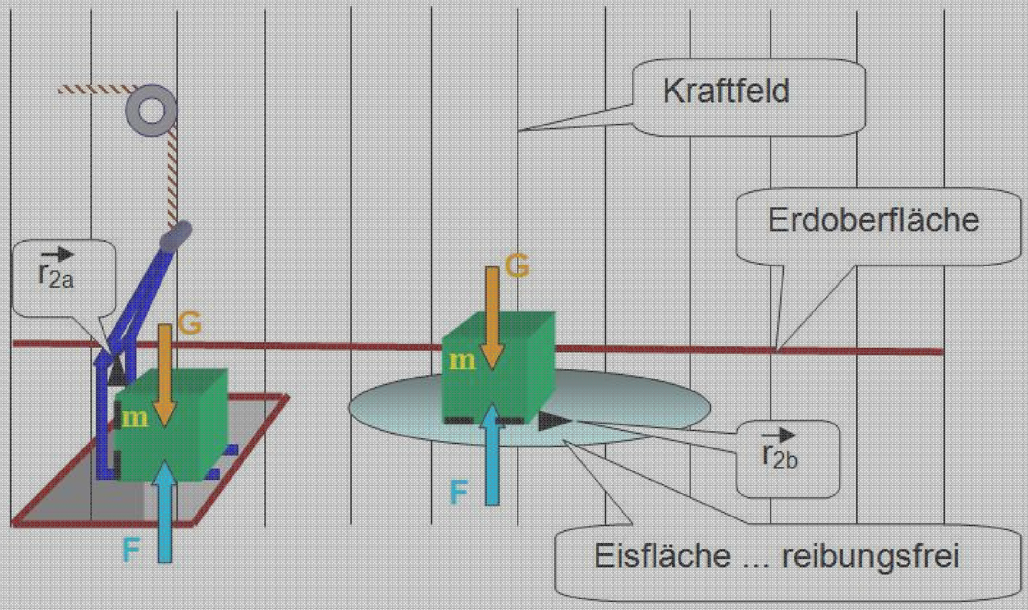
und daher $W_b = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r2_x - r1_x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Nur für Bewegungsanteile in Richtung der wirkenden Kraft muss Arbeit geleistet, oder kann Arbeit aus dem System gewonnen werden.

Erhaltungsgrößen

Arbeit - Energie

$$W = \int_{r1}^{r2} \vec{F}(r) d\vec{r}$$



In beiden Fällen ist $\vec{F}$ (gerichtet entgegen G) näherungsweise konstant und wirkt nur in Richtung y, also $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$ und kann daher vor das Integral gezogen werden.

Im Fall a ist wegen alleiniger Bewegung in y-Richtung $\int_{r1}^{r2} d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$

und daher $W_a = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = mgh$

Im Fall b ist wegen alleiniger Bewegung in x-Richtung $\int_{r1}^{r2} d\vec{r} = \begin{pmatrix} r2_x - r1_x \\ 0 \end{pmatrix}$

und daher $W_b = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r2_x - r1_x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Arbeit - Energie

Die aufgewendete Arbeit steckt als potentielle Energie in der Position der Masse im Kraftfeld.

$$W = m*g*h = E_{pot}$$

Die Kraft F im Kraftfeld läßt sich einfach durch die potentielle Energie ausdrücken:

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{pot}(\vec{r})$$

Kettenregel …

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}*\dot{\vec{r}} = - \text{grad } E_{pot}*\dot{\vec{r}} = - dE_{pot}/dt \\ \vec{F}*\dot{\vec{r}} = m*\ddot{\vec{r}}*\dot{\vec{r}} = dE_{kin}/dt \end{array}\right\} =$$

Mit Lex Secunda … F = m*a

Kettenregel …

$$\boxed{d(E_{kin} + E_{pot}) /dt = 0 \quad \ldots \text{ Energieerhaltungssatz (mech.)}}$$

Erhaltungssätze

Gesamtimpuls $\vec{p}$ in einem abgeschlossenen System

$$\boxed{\vec{p}_{ges} = \sum_i m_i {}^* \vec{v}_i = \text{const.}}$$

bzw. $d\vec{p}_{ges}/dt = 0$

Gesamtenergie E in einem abgeschlossenen System

$$\boxed{E_{ges} = \sum_i E_i = \text{const.}}$$

bzw. $dE_{ges}/dt = 0$

Ende der VO

Oder, wenn noch Zeit …

Die Energie

Betrachten wir beispielhaft folgendes reibungs- und luftwiderstandsfreie Pendel im Schwerefeld. Es treten für die Betrachtung zwei relevante Arten von Energie auf. Durch die Lage bedingte potentielle Energie und die Bewegungs- oder kinetische Energie.

Potentielle Energie im Gravitationsfeld der Erde (Arbeit, die benötigt wird, um die Masse an die Position im Kraftfeld zu bringen) mit:

$$E_{pot} = m*g*h$$

h … Höhendifferenz

m … Masse

g … Erdbeschleunigung

und kinetische Energie (die Arbeit, die benötigt wird, um die Masse auf die Geschwindigkeit zu beschleunigen):

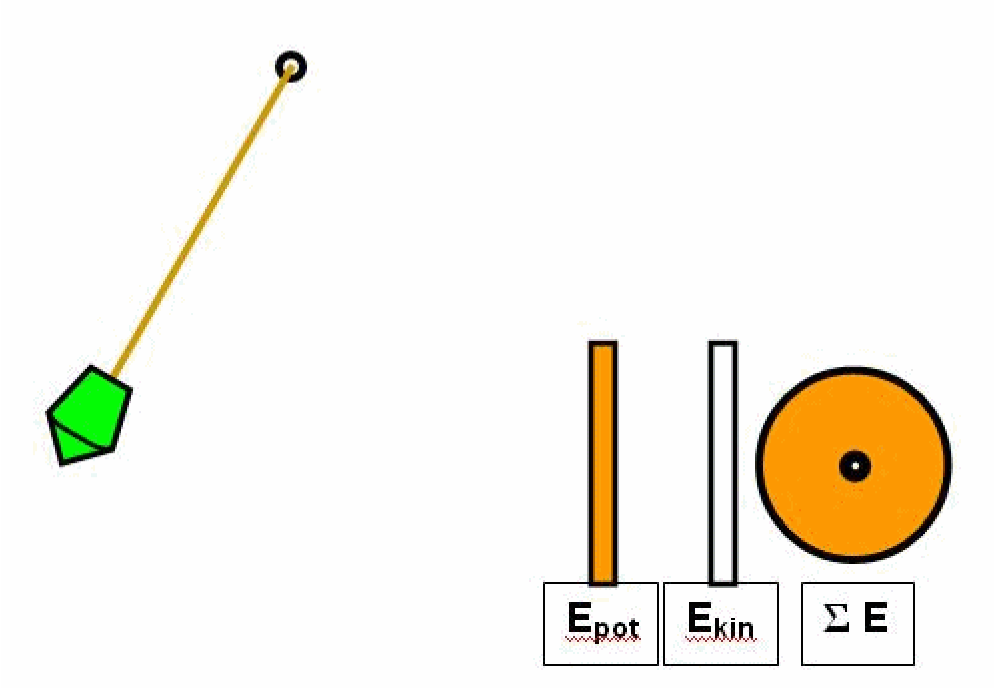
$$E_{kin} = ½*m*v^2/2$$

m … Masse

v … Geschwindigkeit

Die Energie

Das Beispiel veranschaulicht die Überführung einer Energieform in eine andere (potentielle in kinetische und umgekehrt), während die Gesamtsumme invariant bleibt.



007

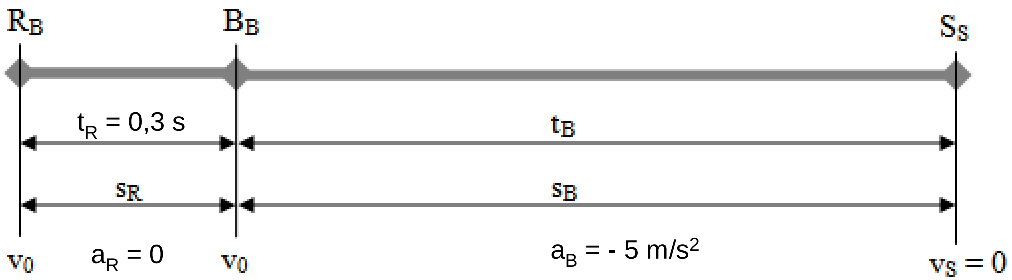
Übungsaufgabe Nr. 4 (Kinematik) Lösung

Sie fahren im Auto mit 60 km/h. Da taucht in 35 m Entfernung plötzlich ein Hindernis auf. Sie benötigen 0,3 s Reaktionszeit und bremsen anschließend mit einer Verzögerung von durchschnittlich 5 m/s^2.

Nach welcher Strecke kommen Sie zum Stillstand?

… allgemein für konstante Beschleunigungen: $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$

2 unterschiedliche Streckenteile mit unterschiedlichen Bewegungsformen

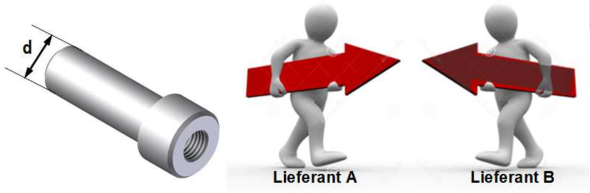


Zwischen Reaktionsbeginn R_B und Bremsbeginn B_B vergeht die bekannte Reaktionszeit t_R.
v_0 = 60 km/h = 60/3,6 = 16,66.. m/s
$s(t_R) = v_0 \cdot t_R$ = (60 km/h/3,6)*0,3 s = 5 m

Zwischen Bremsbeginn B_B und Stillstand S_S baut die konstante durchschnittliche Verzögerung die Geschwindigkeit ab.
$v(t_B) = 0 = v_0 - a \cdot t_B \Rightarrow t_B = v_0/a$ = (60 km/h/3,6)/5 m/s^2 = 3,333333333.. s
$s(t_B) = v_0 \cdot t_B - 1/2 \cdot a \cdot t_B^2$ = 16,6.. * 3,3.. - 2,5*3,3..^{2} = 27,7.. m

Der Anhalteweg setzt sich aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B zusammen und beträgt also 32,77.. m.

Übungsaufgabe Nr. 5 (Messreihen) Lösung



	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
Lief. A:	5,85	5,70	5,75	5,95	5,75

$\overline{d}_{AM}$ = $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)/n$ = 29/5 = 5,8 mm

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
Lief. B:	5,80	5,90	5,75	5,70	5,85

$\overline{d}_{BM}$ = $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)/n$ = 29/5 = 5,8 mm

$$s^2 = ((d_1 - d_M)^2 + (d_2 - d_M)^2 + (d3 - d_M)^2 + (d_4 - d_M)^2 + (d_5 - d_M)^2)/n$$

s_A^2 = ((5,80 – 5,85)² + (5,80 – 5,70)² + (5,80 – 5,75)² +
+ (5,80 – 5,95)² + (5,80 – 5,75)²)/5 =
= (0,05² + 0,1² + 0,05² + 0,15² + 0,05²)/5 =
= (0,0025 + 0,01 + 0,0025 + 0,0225 + 0,0025)/5 =
= 0,040/5 = 0,008

s_B^2 = ((5,80 – 5,80)² + (5,80 – 5,90)² + (5,80 – 5,75)² +
+ (5,80 – 5,70)² + (5,80 – 5,85)²)/5 =
= (0,00² + 0,1² + 0,05² + 0,1² + 0,05²)/5 =
= (0,00 + 0,01 + 0,0025 + 0,01 + 0,0025)/5 =
= 0,025/5 = 0,005

Beide Lieferanten liefern nach dieser Stichprobe im Mittel Bolzen gleicher Durchmesser. Die Streuung der gefertigten Bolzen ist jedoch bei Lieferant B geringer. Daher ist er in Bezug auf Maßhaltigkeit der bessere Lieferant.

Übungsaufgabe Nr. 6 (Kinematik)

Sie befinden sich in einem Karussell, das sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 1,6 s^{-1} dreht und haben einen Achsabstand von R = 5 m.

a) Welche Momentangeschwindigkeit haben Sie?

b) Welcher Umdrehungszahl (U/min) entspricht die Geschwindigkeit?

Übungsaufgabe Nr. 7 (Kinematik)

Sie schlendern auf dem Camino del Rey und kommen von links an die dargestellte Stelle, an der 3,8m Weg fehlen. Die Fortsetzung des Weges rechts liegt 0,8m tiefer. Mit welcher Geschwindigkeit müssen Sie (horizontal) anlaufen, um sicheren Fußes auf der anderen Seite landen zu können? ($g = 10 m/s^2$, Absprung nur horizontal)

Übungsaufgabe Nr. 8 (Kinematik)

Ein verlustloses Pendel mit masselosem Faden der Länge l = 300 mm startet an der Position einer Auslenkung von 0,5 rad im Schwerkraftfeld der Erde ($g = 10 m/s^2$) zu schwingen. Welche Tangentialgeschwindigkeit hat das Pendel an der Stelle gleich großer potentieller, wie kinetischer Energie?