TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Physik für Maschinenbau

Vorlesung 311.123 Wintersemester 2019/20

Univ.-Prof. Dipl. Phys. Dr.-Ing. Andreas Otto

Wien, 03.12.2019

Arbeit - Energie

Die aufgewendete Arbeit steckt als potentielle Energie in der Position der Masse im Kraftfeld.

$$W = m * g * h = E_{pot}$$

Die Kraft F im Kraftfeld läßt sich einfach durch die potentielle Energie ausdrücken:

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{pot}(\vec{r})$$

Kettenregel …

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} * \dot{\vec{r}} &= - \text{grad } E_{pot} * \dot{\vec{r}} = - dE_{pot}/dt \\ \vec{F} * \dot{\vec{r}} &= m * \ddot{\vec{r}} * \dot{\vec{r}} = dE_{kin}/dt \end{aligned}\right\} =$$

Mit Lex Secunda … F = m*a

Kettenregel …

$$\boxed{d(E_{kin} + E_{pot}) / dt = 0 \quad \ldots \text{ Energieerhaltungssatz (mech.)}}$$

Erhaltungssätze

Gesamtimpuls $\vec{p}$ in einem abgeschlossenen System

$$\boxed{\vec{p}_{ges} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = const.}$$

bzw. $d\vec{p}_{ges}/dt = 0$

Gesamtenergie E in einem abgeschlossenen System

$$\boxed{E_{ges} = \sum_i E_i = const.}$$

bzw. $dE_{ges}/dt = 0$

Die Energie

Betrachten wir beispielhaft folgendes reibungs- und luftwiderstandsfreie Pendel im Schwerefeld. Es treten für die Betrachtung zwei relevante Arten von Energie auf. Durch die Lage bedingte potentielle Energie und die Bewegungs- oder kinetische Energie.

Potentielle Energie im Gravitationsfeld der Erde (Arbeit, die benötigt wird, um die Masse an die Position im Kraftfeld zu bringen) mit:

$$E_{pot} = m*g*h$$

h … Höhendifferenz

m … Masse

g … Erdbeschleunigung

und kinetische Energie (die Arbeit, die benötigt wird, um die Masse auf die Geschwindigkeit zu beschleunigen):

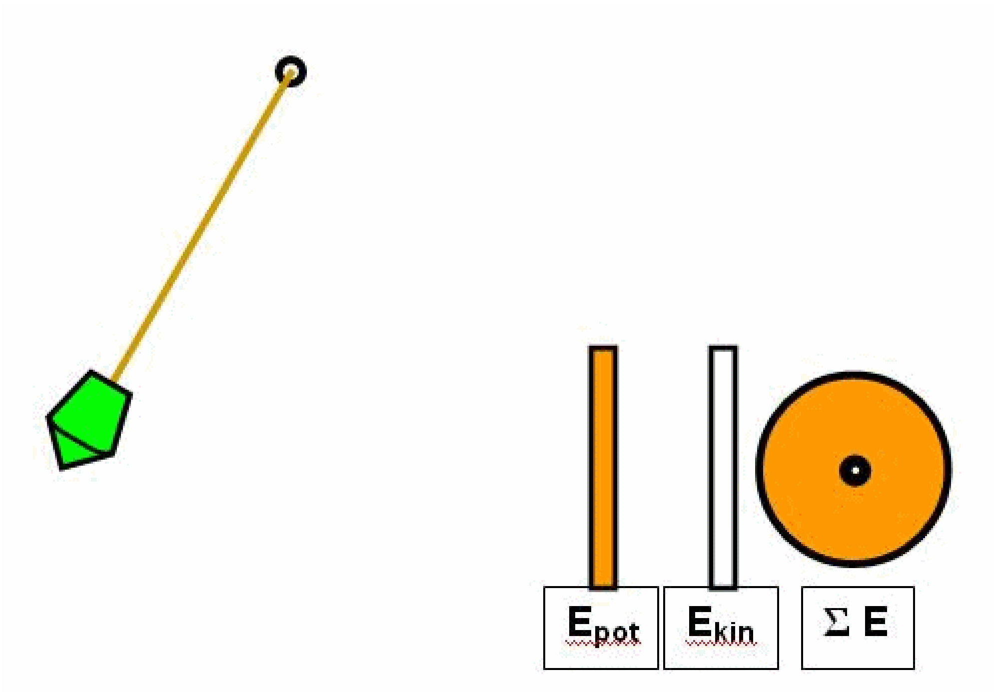
$$E_{kin} = ½*m*v^2/2$$

m … Masse

v … Geschwindigkeit

Die Energie

Das Beispiel veranschaulicht die Überführung einer Energieform in eine andere (potentielle in kinetische und umgekehrt), während die Gesamtsumme invariant bleibt.



007

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung (Massenträgheitsmoment)

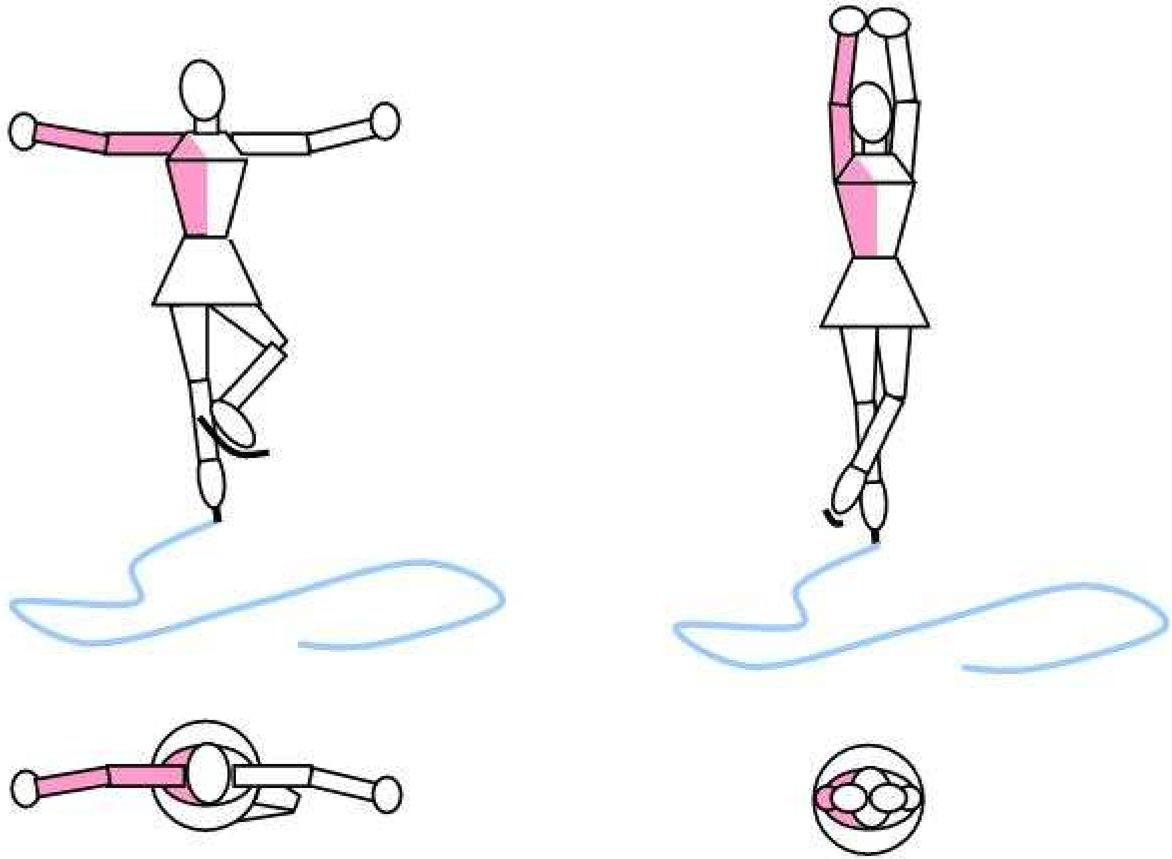
Lassen Sie sich nun zur Untersuchung eines Phänomens der Drehbewegung „aufs Glatteis“ führen …

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung

Position 1 Position 2

Frontalansicht →

Draufsicht →

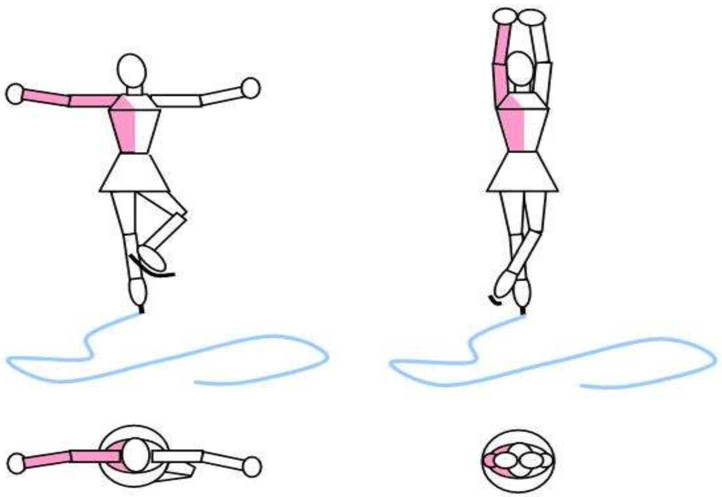


Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung (Phänomen Massenträgheitsmoment)

Kinematik

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung



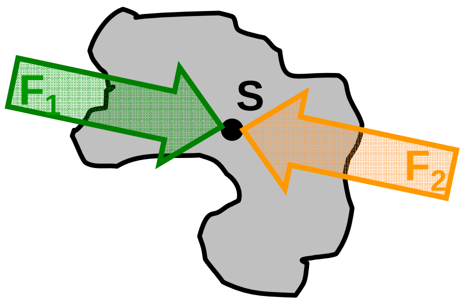
Wir haben die Trägheit der Masse als Beharrungsphänomen kennengelernt und Kräfte als notwendig, um eine Änderung des Bewegungszustands herbeizuführen. All das zusammengefasst in Newtons Lex Prima?!

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung

Den Ortsvektor des Massenmittelpunkts $\vec{r}_S$ haben wir als das mit der Masse gewichtete Mittel der Ortsvektoren $\vec{r}$ aller Massepunkte dm eines Körpers errechnet.

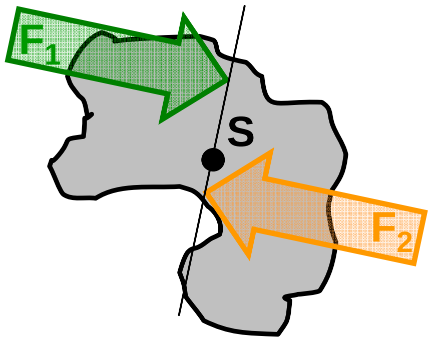
$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int_K \vec{r}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_K \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

Dann haben wir Kräfte betrachtet, deren Summierung eine Wirkungslinie ergab, die durch den Massenmittelpunkt führte.



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ … keine Bewegungsänderung

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung

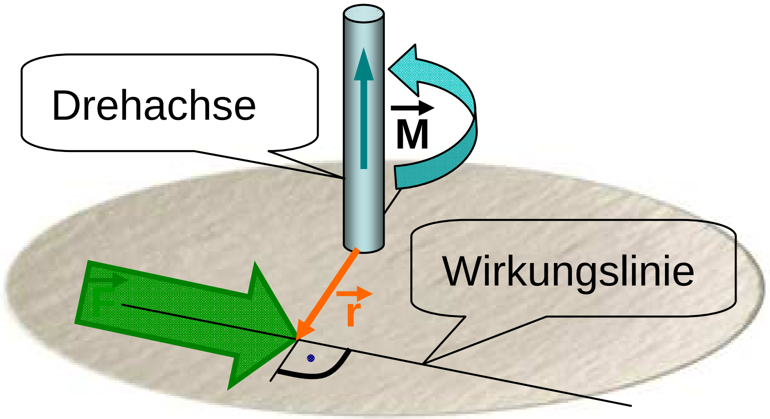


Betrachten wir nun Kräfte deren Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt bzw. Massenmittelpunkt läuft, so stellt sich ein völlig anderes Bild dar.

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ … trotzdem ist jetzt ganz offensichtlich, dass eine Bewegungsänderung ausgelöst wird.

Eine Kraft, deren Wirkungslinie nicht durch den Massenmittelpunkt verläuft, erzeugt ein Drehmoment. Wie die Kraft mit Wirkungslinie durch den Massenmittelpunkt eine geradlinige Bewegungsänderung hervorruft, verursacht ein Drehmoment eine Bewegungsänderung rotatorischer Art.

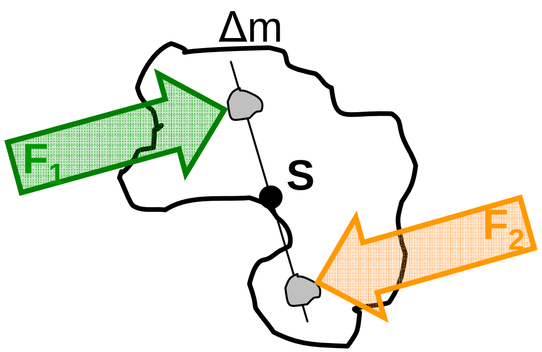
Physikalische Größe	Drehmoment
Größensymbol	$\vec{M}$
Dimensionssymbol	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$
Einheit	Newton $\cdot$ m = $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Einheitenzeichen	-



Das Drehmoment ergibt sich als das Vektorprodukt des Abstands der Wirkungslinie von der Drehachse und der Kraft.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung

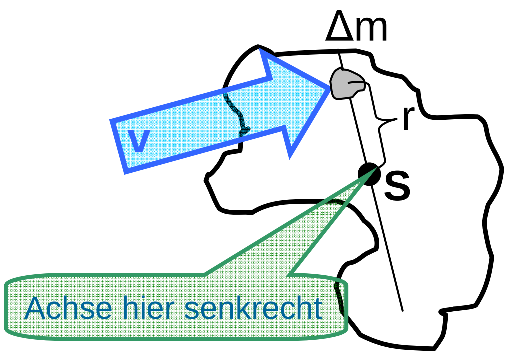


Ein detaillierterer isolierter Blick auf ein kleines Massenelement Δm des Körpers und Betrachtung der angreifenden Kraft F_1 lässt nicht an einem Trägheitswiderstand gegen eine Bewegungsänderung zweifeln.

Auch eine entgegengesetzt gleich große Kraft F_2 die an einem symmetrisch gegenüberliegenden identen Masseelement angreift kompensiert keineswegs den Trägheitswiderstand, sondern addiert sich zu diesem.

Um also den Trägheitswiderstand der Gesamtmasse gegen Rotation zu berechnen, muss man augenscheinlich alle kleinen Massenelemente aufsummieren, bzw. nach Grenzübergang über alle dm integrieren.

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung



Um diesen Trägheitswiderstand gegen eine Drehbewegung herzuleiten, betrachten wir die Energiebilanz eines kleinen Masseteilchens Δm.

$E_{kin} = ½\ \Delta m * v^2$

Durch auf die Rotation bezogene Größen, darf sich an der kinetischen Energie natürlich nichts ändern.

Mit Ersetzen von v durch ω*r erhält man:

$E_{kinrot} = ½\ \Delta m * \omega^2 * r^2$

Abstand zu einer bestimmten Drehachse

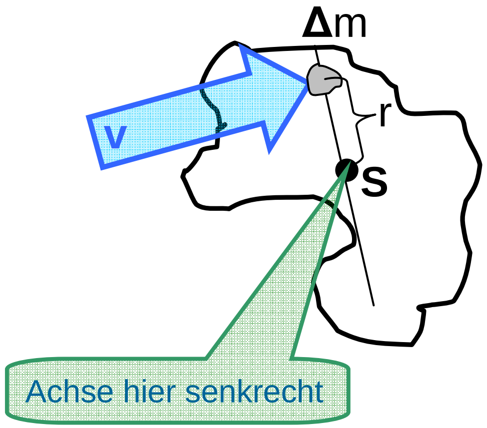
Und für den Gesamtkörper entsprechend die Summation aller m_i:

$E_{kin} = ½ * \Sigma \Delta m_i * v_i^2 = E_{kinrot} = ½ * \Sigma \Delta m_i * r_i^2 * \omega^2$

So wie v in ω eine Entsprechung hat, entspricht der Trägheit der Gesamtmasse $M = \Sigma \Delta m_i$ das Massenträgheitsmoment $J = \Sigma \Delta m_i * r_i^2$ als Widerstand gegen eine Bewegungsänderung.

Mathematischer Kniff, um eine Analogie zwischen geradliniger und Rotationsbewegung herstellen zu können.

Vergleich geradlinige Bewegung – Rotationsbewegung



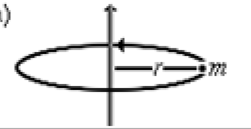
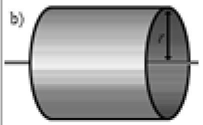
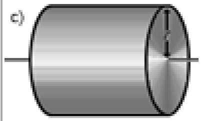
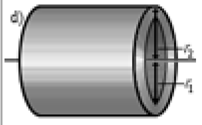
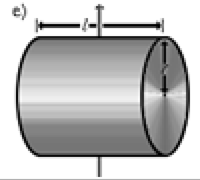
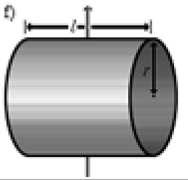
Der Grenzübergang führt schließlich zur Formel für das Massenträgheitsmoment:

$$\boxed{J = \int_V r^2 dm}$$

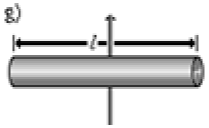
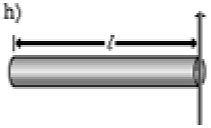
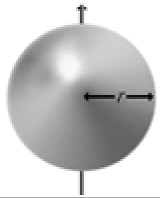
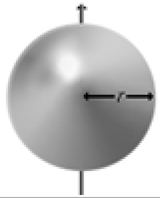
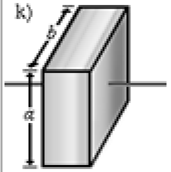
Volumen

Ganz offensichtlich ist hier die Entfernung r von der Rotationsachse enthalten und erklärt den Einfluss der unterschiedlichen Anordnung der rotierenden Masse auf die Winkelgeschwindigkeit. Ausgerechnet der Erhaltungssatz dessen Verletzung auf den ersten Blick in Bezug auf die Pirouette vermutet werden konnte, führt auf die Untermauerung der Beobachtung.

Kinematik

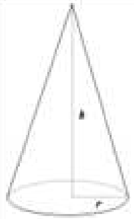
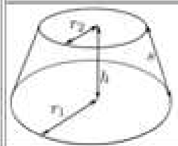
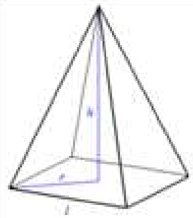
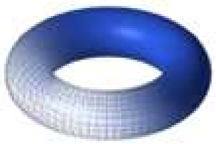
Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
a) 	Eine Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse.	$J = m \cdot r^2$
b) 	Ein Zylindermantel, der um seine Symmetrieachse rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$J \approx m \cdot r^2$
c) 	Ein Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
d) 	Ein Hohlzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert. Schließt die vorgenannten Grenzfälle Zylindermantel und Vollzylinder mit ein.	$J = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$
e) 	Ein Vollzylinder, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert.	$J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
f) 	Ein Zylindermantel, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$

Quelle:http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment

Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
g) 	Ein dünner Stab, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
h) 	Dünner Stab, der um eine Querachse durch ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den dünnen Stab.	$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$
i) 	Eine Kugelschale, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$J \approx \frac{2}{3} m \cdot r^2$
j) 	Eine massive Kugel, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert.	$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
k) 	Ein Quader, der um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, die parallel zu seinen Kanten c liegt.	$J = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$

Quelle:http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment

Kinematik

Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
	Ein massiver Kegel, der um seine Achse rotiert.	$J = \frac{3}{10} m \cdot r^2$
	Ein Kegelmantel, der um seine Achse rotiert. Die Gleichheit mit dem Trägheitsmoment eines Vollzylinders kann man sich so vorstellen, dass man jeden Kegelmantel zu einer Kreisscheibe "plattdrücken" kann, ohne sein Trägheitsmoment zu verändern.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
	Ein massiver Kegelstumpf, der um seine Achse rotiert.	$J = \frac{3}{10} m \cdot \frac{(r_1^5 - r_2^5)}{(r_1^3 - r_2^3)}$
	Eine vierseitige, regelmäßige, massive Pyramide, die um ihre Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{5} m \cdot r^2 = \frac{1}{10} m l^2$
	Volltorus mit dem Radius R und der halben Dicke r der um die Symmetrieachse rotiert. (Der Radius R ist so gemeint, dass der Außenradius des Torus R+r ergibt)	$J = m \left(\frac{3}{4} \cdot r^2 + R^2 \right)$

Quelle:http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Diese Seite nicht ausdrucken

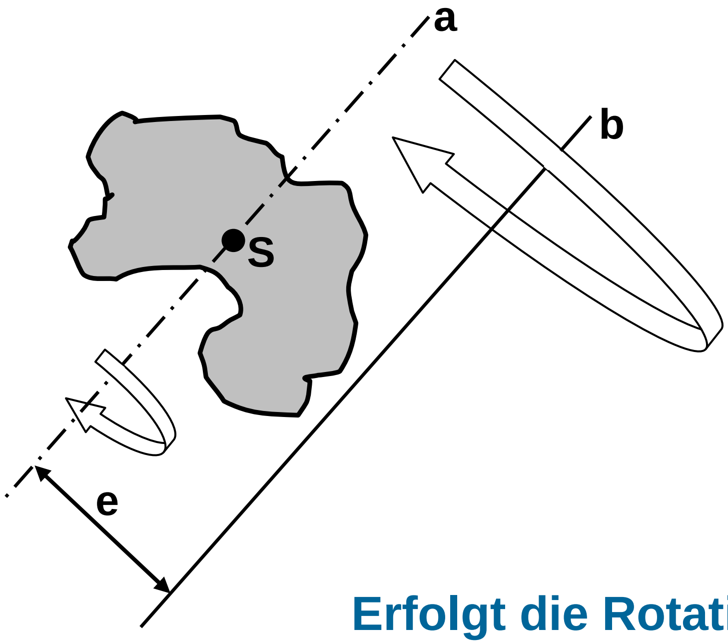
Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

Quelle:http://de.wikipedia.org/wiki/
Trägheitsmoment

Diese Seite nicht ausdrucken

Beispielrechnungen werden später veröffentlicht

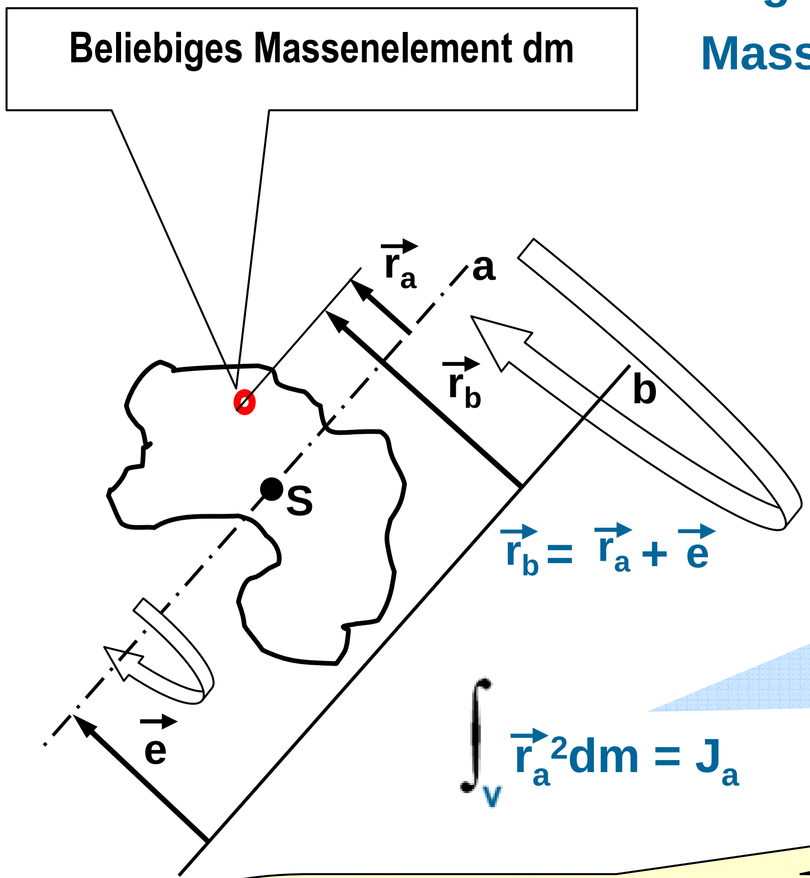
Steiner'scher Satz



Unsere Betrachtungen bisher waren auf Drehachsen durch den Massenmittelpunkt gerichtet.

Erfolgt die Rotation um eine, zu einer durch den Massenmittelpunkt gehenden parallelen Achse (b) und das Massenträgheitsmoment (J_a) um die Achse (a) durch den Massenmittelpunkt ist bekannt, so ist das Massenträgheitsmoment (J_b) um die parallele Achse (b), um das Produkt aus Abstandsquadrat und Masse größer.

Steiner'scher Satz



Allgemein ließ sich das Massenträgheitsmoment errechnen als:

$$J = \int_V r^2 dm$$

Hier, um die Achse b also: $J_b = \int_V \vec{r}_b^{\,2} dm$

$$\vec{r}_b = \vec{r}_a + \vec{e}$$

$$J_b = \int_V (\vec{r}_a + \vec{e})^2 dm = \int_V (\vec{r}_a^{\,2} + 2 * \vec{r}_a * \vec{e} + \vec{e}^{\,2}) dm$$

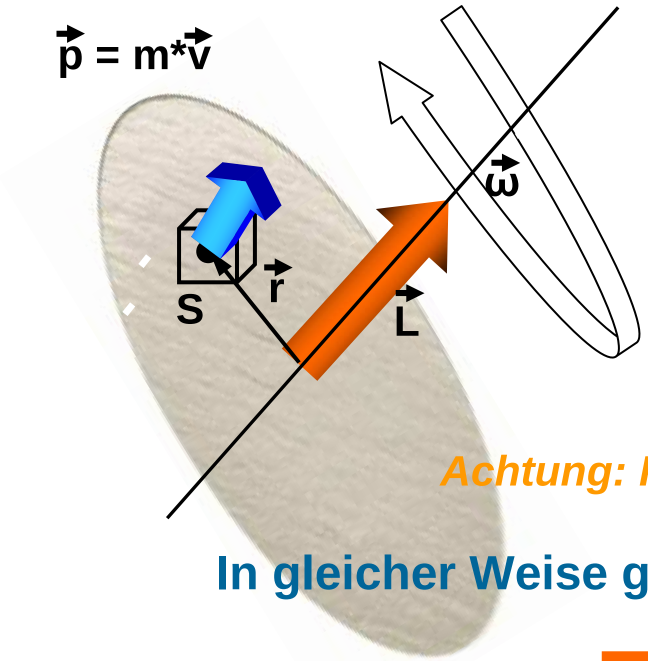
$$\int_V \vec{r}_a^{\,2} dm = J_a \qquad \int_V 2 * \vec{r}_a * \vec{e}\, dm = 0 \qquad \int_V \vec{e}^{\,2}\, dm = m * e^2$$

Aus der Definition des Schwerpunkts folgt, dass das Integral der Ortskoordinaten aller Massenpunkte null ist.

$$\boxed{J_b = J_a + m * e^2}$$

Steiner'scher Satz

Drehimpuls



Mit dem Drehmoment als Analogie zur Kraft bei geradliniger Bewegung war es gelungen, für die Rotationsbewegung einen, Newtons 2. Axiom entsprechenden, Ausdruck zu formulieren.

$F = m \cdot a \rightarrow \boxed{M = J \cdot \alpha}$

$F = m \cdot dv/dt \rightarrow \boxed{M = J \cdot d\omega/dt}$

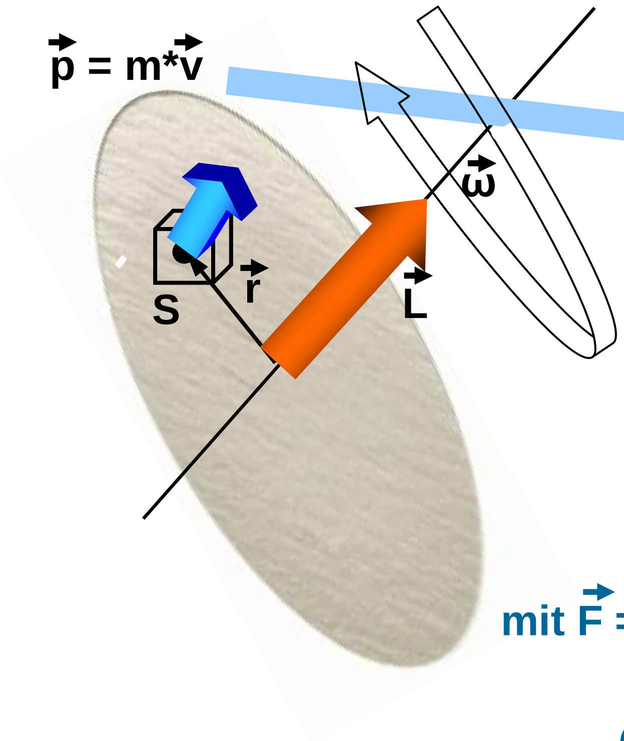
Achtung: Kraft und Moment haben unterschiedliche Dimensionen!

In gleicher Weise gelingt das für den Drehimpuls

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Drehimpuls

Nachweis der Proportionalität der zeitlichen Änderung des Drehimpulses zum Drehmoment.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} * m$$

Differentiation führt auf die zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$d\vec{L}/dt = m*(\vec{r} \times d\vec{v}/dt + d\vec{r}/dt \times \vec{v})$$

$$d\vec{L}/dt = m*(\vec{r} \times \vec{a} \quad + \quad \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0})$$

mit $\vec{F} = m*\vec{a}$

$$d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses entspricht dem Drehmoment!

Drehimpuls

Physikalische Größe	**Drehimpuls**
Größensymbol	$\vec{L}$
Dimensionssymbol	$L^2 \cdot M \cdot T^{-1}$
Einheit	Newton$\cdot$m$\cdot$s = kg$\cdot$m$^2\cdot$s^{-1}
Einheitenzeichen	-

Drehimpulserhaltung: Wirkt in einem abgeschlossenen System kein resultierendes Drehmoment, so ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

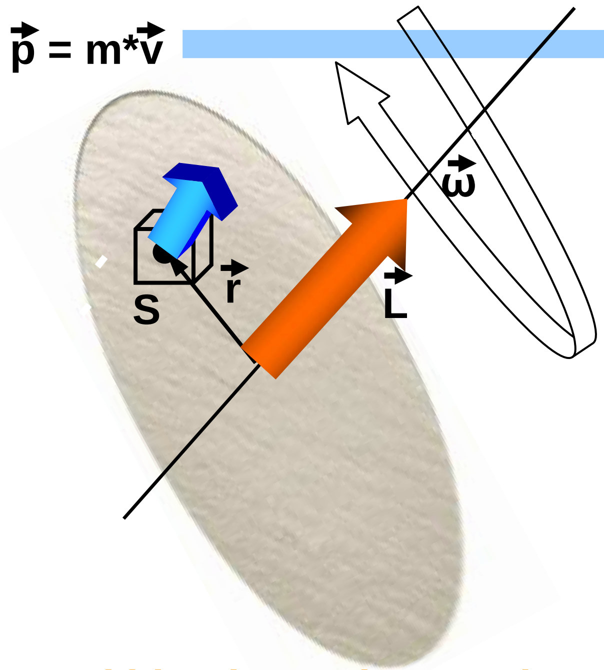
$$d\vec{L}/dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Dies folgt aus der Invarianz der Naturgesetze gegen Drehung im Raum.

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{p} = m*\vec{v}$



$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

für p und r in der xy-Ebene

$$\vec{L} = r \cdot m \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{e}_z$$

mit Drehimpuls parallel zur Drehachse

$$\boxed{L = J \cdot \omega}$$

*Rückblende … Eistänzerin – Pirouette   L = J*ω … Erhaltungssatz = const -*

-→ Wird J verringert, muss wegen der Impulserhaltung im Gegenzug ω zunehmen, was die im ersten Moment verblüffende Beobachtung erklärt.

Kinematik

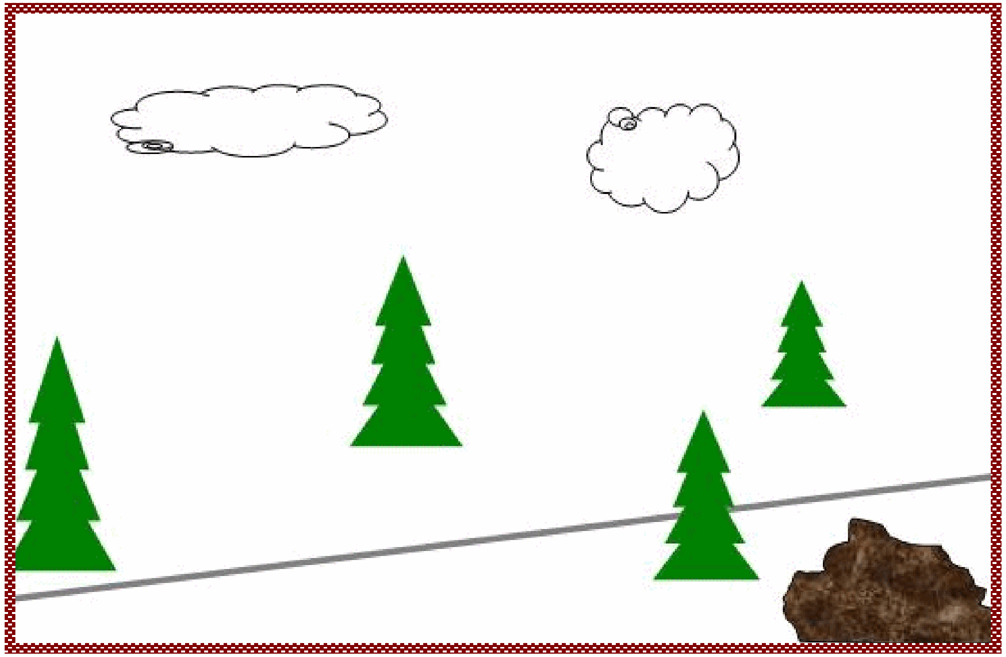
Geradlinige Bewegung - Translation

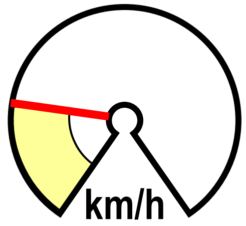
Phys. Phänomen	Formel	Einheit
Weg	$s = \int v\,dt$	m
Geschwindigkeit	$v = ds/dt = \int a\,dt$	m/s
Beschleunigung	$a = dv/dt$	m/s^2
Masse	m	kg
Kraft	$F = ma = dp/dt$	$N = kgm/s^2$
Impuls	$p = mv$	Ns = kgm/s
Arbeit	$W = \int F\,ds$	Nm = J = Ws
Kinetische Energie	$E = mv^2/2$	Nm = J
Leistung	$P = dW/dt$	W = J/s

Drehbewegung - Rotation

Phys. Phänomen	Formel	Einheit
Winkel	$\varphi = \int \omega\,dt$	rad
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = d\varphi/dt = \int \alpha\,dt$	rad/s ... 1/s
Winkelbeschleunigung	$\alpha = d\omega/dt$	rad/s2 ... $1/s^2$
Trägheitsmoment	$J = \int r^2\,dm$	kgm^2
Drehmoment	$M = J\alpha = dL/dt$	$Nm = kgm^2/s^2$
Drehimpuls	$L = J\omega$	$Nms = kgm^2/s$
Arbeit	$W = \int M\,d\varphi$	Nm = J = Ws
Kinetische Energie	$E = J\omega^2/2$	Nm = J
Leistung	$P = dW/dt = M\omega$	W = J/s

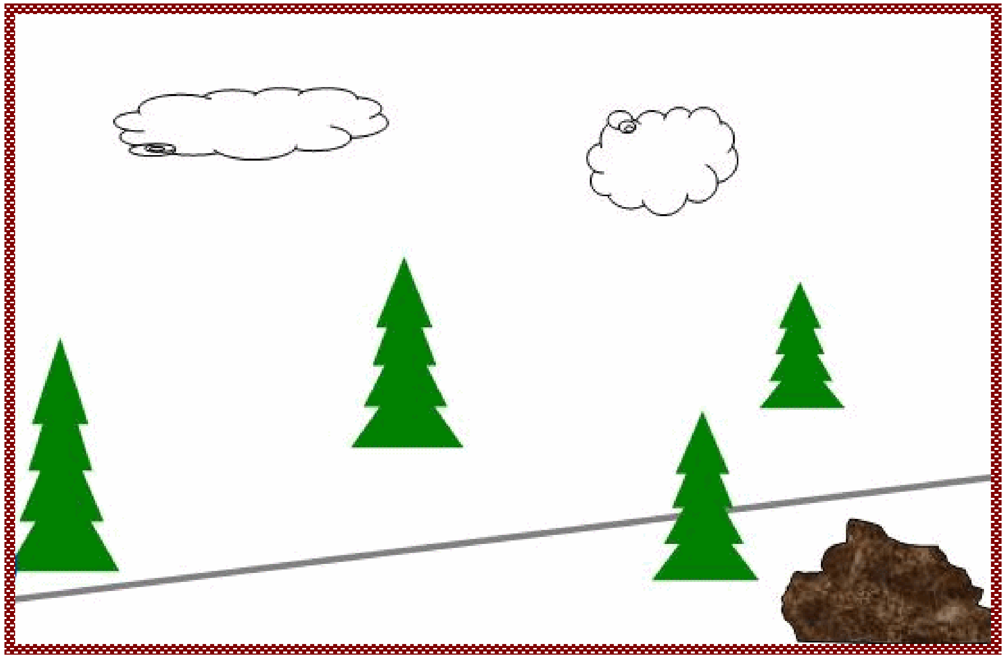
Leistung

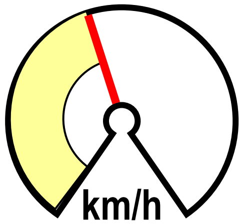




Sie fahren jedoch …

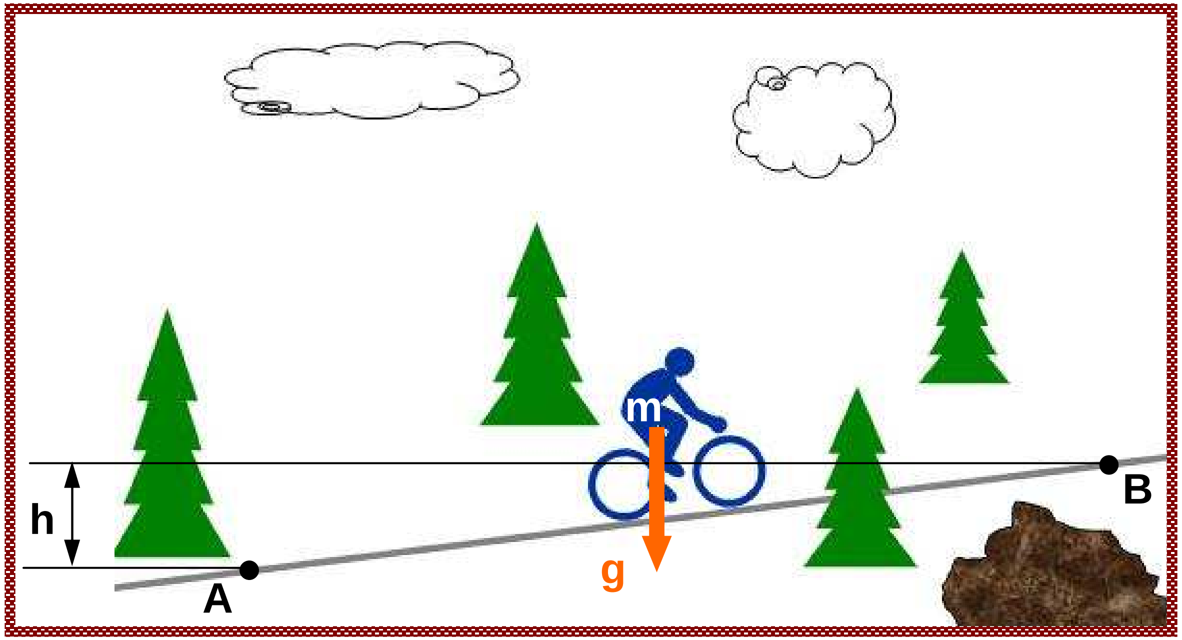
Leistung





… sicher eher so hinauf!

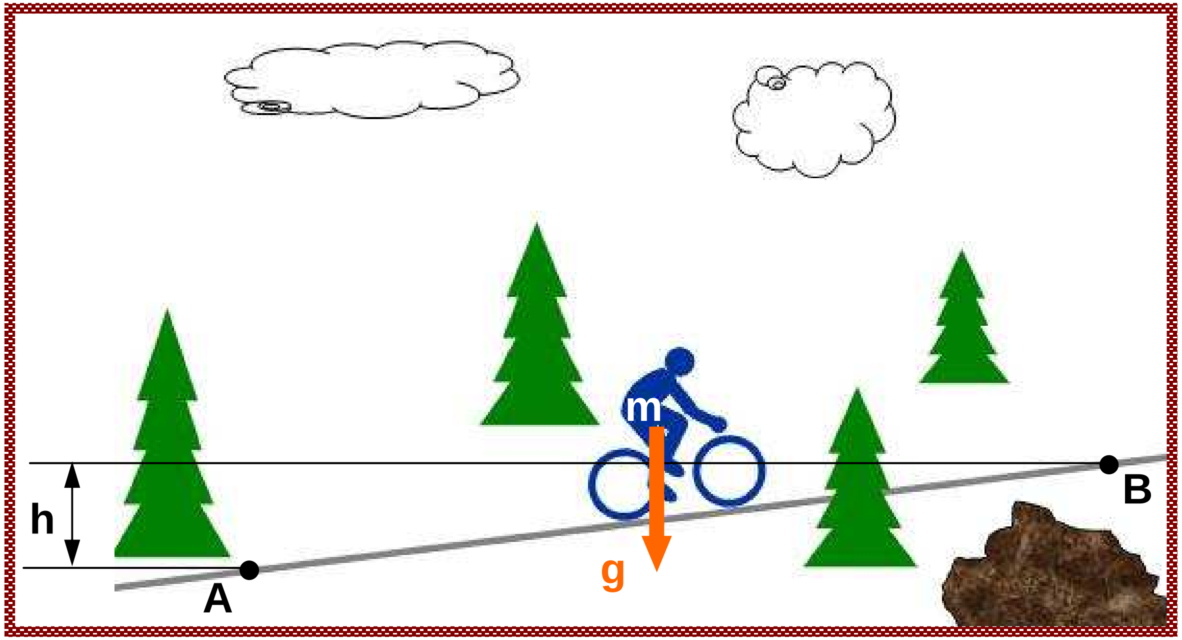
Leistung



Um von Position A nach B zu gelangen, muss der Radfahrer mit der Masse m, *bei Vernachlässigung des Luftwiderstands und anderer Reibungs-einflüsse*, Arbeit im Gravitationsfeld gegen die wirkende Kraft leisten. Die Wegstrecke in Richtung dieser Kraft entspricht genau dem Höhenunter-schied h. Der Höhenunterschied, wie die Masse, sind für beide Fälle gleich, wie daher auch die Arbeit, W = m*g*h.

$$\left[W_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = \int_{C(\vec{r}1\,\vec{r}2)} \vec{F}\,\vec{r}\,dr \right]$$

Leistung



Mit der höheren Geschwindigkeit wird die Arbeit in kürzerer Zeit verrichtet.

Die physikalische Größe, die man (in diesem Fall physisch) bereitzustellen hat, ist von großer Bedeutung und verknüpft die Arbeit W = m*g*h mit der Zeit in der sie verrichtet wird und heißt Leistung …

… $P = W/t$ [W] … bzw. bei Variabilität … $P = dW/dt$ [W]

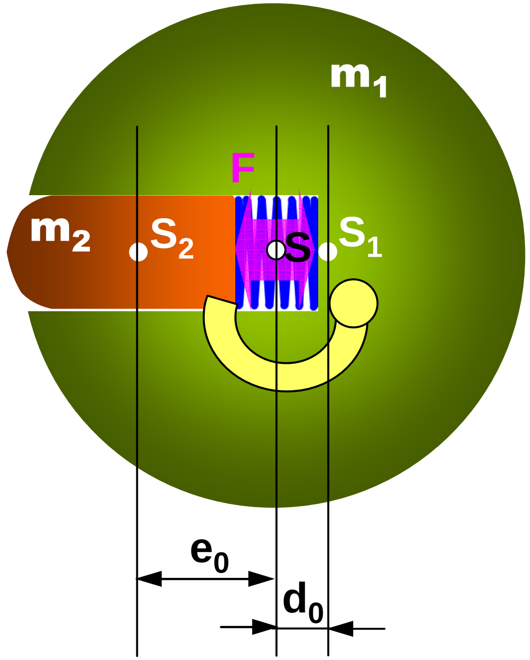
Leistung wird mit einer abgeleiteten SI Einheit erfaßt.

Physikalische Größe	**Leistung**
Größensymbol	**P**
Dimensionssymbol	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3}$
Einheit	Watt = J/s = $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ = $N \cdot m \cdot s^{-1}$
Einheitenzeichen	**W**

Schwerpunktsatz

Aus der Definition des Massenmittelpunkts der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ folgt für die Lage im Anfangszustand: $d_0 * m_1 = e_0 * m_2$

Anm.: Um die Berechnung einfacher zu gestalten, ist die Feder nicht Teil des Systems.



Mit den bereits bekannten Bewegungsgleichungen verfolgen wir den Prozess.

Schwerpunktsatz

Anfangszustand: $d_0 * m_1 = e_0 * m_2$ daraus errechnet man $d_0 = e_0 * m_2/m_1$
aus Gleichgewichtsbedingung

Achtung: x und y (nächste Seite) sind hier keine Koordinaten, sondern Variable, die der Übersichtlichkeit und Reduktion der Schreibmenge dienen sollen)

Beschleunigung: $F(t) = a_1 * m_1 = a_2 * m_2$

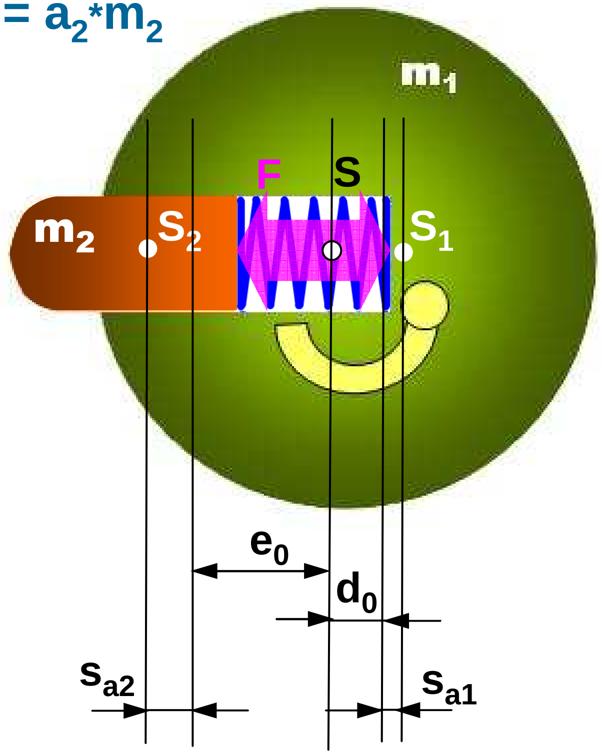
$a_1 = F(t)/m_1,\ a_2 = F(t)/m_2$

$$s_{a1}(t) = \int_{t_2=0}^{t_2=t}\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} (F(t_1)/m_1)\,dt_1\,dt_2$$

$$= (1/m_1)\int_{t_2=0}^{t_2=t}\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} F(t_1)\,dt_1\,dt_2$$

$$s_{a2}(t) = (1/m_2)\int_{t_2=0}^{t_2=t}\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} F(t_1)\,dt_1\,dt_2$$

..jeweils mit $v_0 = 0$



Da der absolute Wert der zu einem bestimmten Zeitpunkt zurückgelegten Strecke für uns hier von sekundärer Bedeutung ist, können wir schreiben:

$s_{a1}(t) = x(t)/m_1$ **und**

$s_{a2}(t) = x(t)/m_2$

Schwerpunktsatz

Anfangszustand: $d_0 * m_1 = e_0 * m_2 \ldots d_0 = e_0 * m_2 / m_1$

Achtung: x (vorige Seite) und y sind hier keine Koordinaten, sondern Variable, die der Übersichtlichkeit und Reduktion der Schreibmenge dienen sollen)

Nach Ende der Beschleunigungsphase

folgt gleichförmige Bewegung.

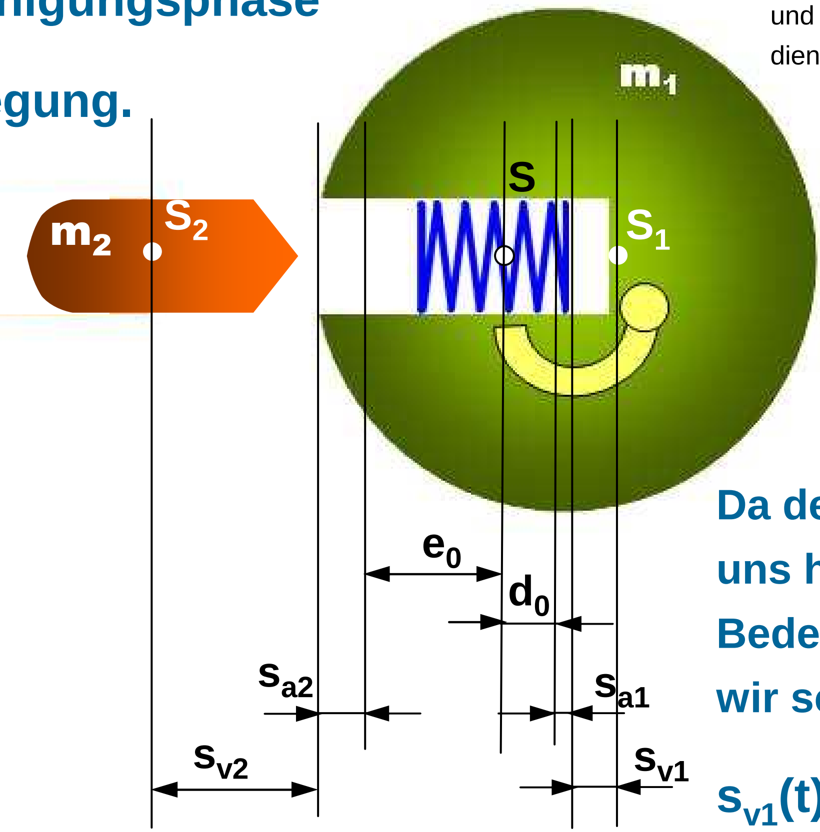
$$v_{1max} = \int_0^{t_1} (F(t)/m_1)dt$$

$$= (1/m_1) \int_0^{t_1} F(t)dt$$

$$s_{v1}(t) = (t/m_1) \int_0^{t_1} F(t)dt$$

$$s_{v2}(t) = (t/m_2) \int_0^{t_1} F(t)dt$$

mit t_1 = Zeitpunkt am Ende der Beschleunigungsphase



Da der absolute Wert für uns hier von sekundärer Bedeutung ist können wir schreiben:

$$s_{v1}(t) = y(t)/m_1 \quad \text{und}$$

$$s_{v2}(t) = y(t)/m_2$$

Schwerpunktsatz

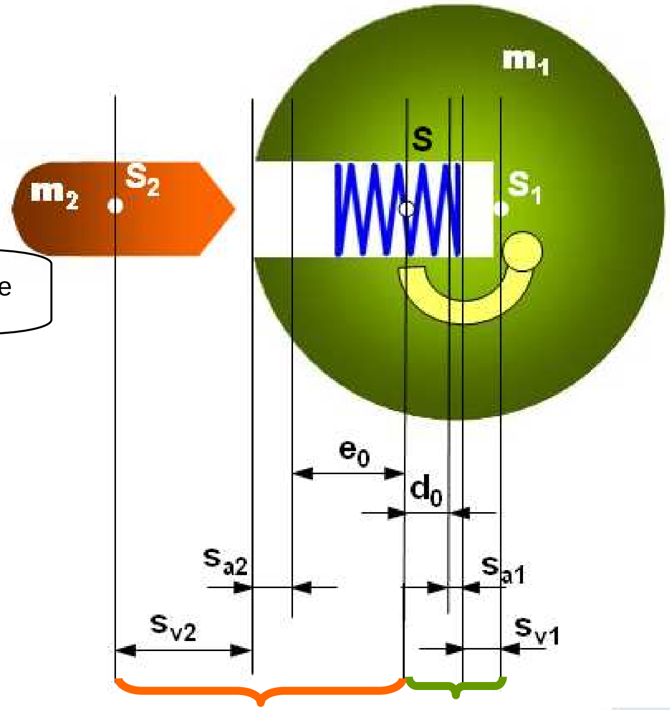
aus Beschleunigungsphase

Zu einem beliebigen Zeitpunkt befindet sich also der Schwerpunkt der Masse m_1 an der

Position $d_0 + x(t)/m_1 + y(t)/m_1$ vom ursprünglichen Gesamtschwerpunkt entfernt und der Schwerpunkt der Masse m_2 an der

aus gleichf. Bewegungsphase

Position $e_0 + x(t)/m_2 + y(t)/m_2$ vom ursprünglichen Gesamtschwerpunkt entfernt.



Für den Schwerpunkt des Gesamtsystems muss dann wie zuvor gelten:

$$m_1 * \underbrace{(d_0 + x(t)/m_1 + y(t)/m_1)} = m_2 * \underbrace{(e_0 + x(t)/m_2 + y(t)/m_2)}$$

$$\cancel{m_1}(e_0 * m_2/\cancel{m_1} + x(t)/\cancel{m_1} + y(t)/\cancel{m_1}) = m_2 * (e_0 + x(t)/m_2 + y(t)/m_2)$$

$$e_0 * m_2 + x(t) + y(t) = m_2 * e_0 + x(t) + y(t)$$

☑ **- korrekt, also bleibt der Schwerpunkt fix**

mit der Anfangsbedingung

$d_0 = e_0 * m_2/m_1$

Schwerpunktsatz

Dieser Sachverhalt ist offensichtlich nicht auf die eine Dimension beschränkt, in der wir unsere grundlegenden Betrachtungen durchgeführt haben.

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig, unabhängig von den Bewegungen und Wechselwirkungen von Teilen des Systems.

007

Stoßprozesse

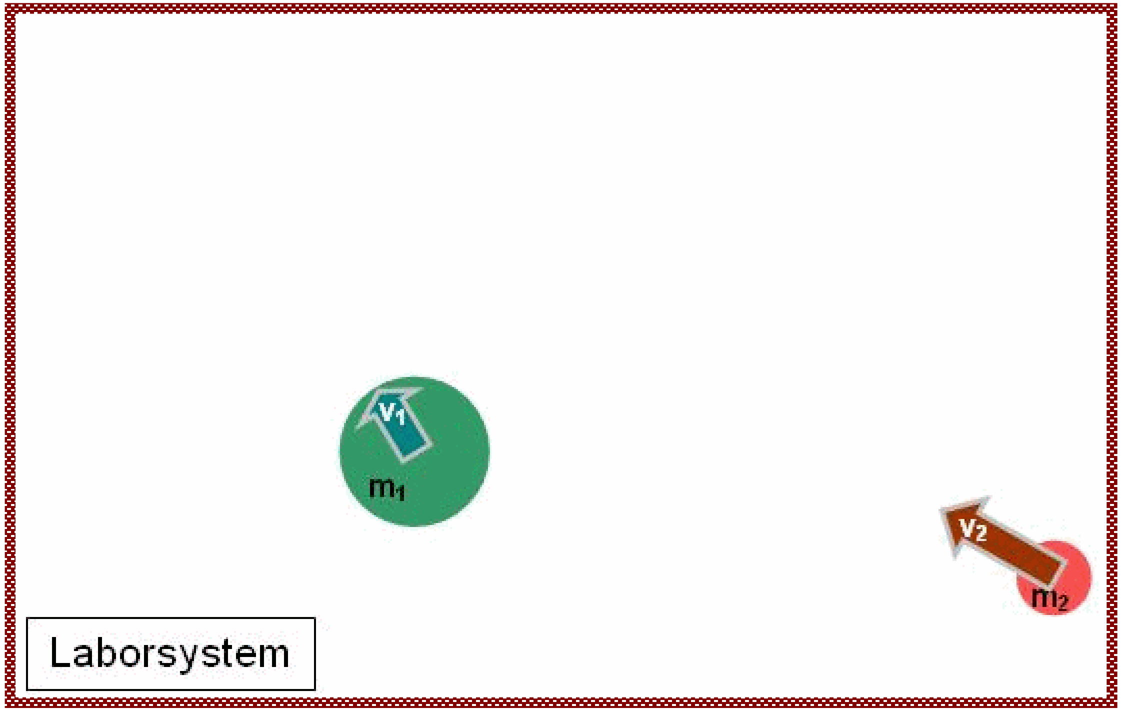
Sobald wir es mit mehr als einem Körper und Bewegung zu tun haben, sind Kollisionen nicht mehr ausgeschlossen …

Ein Stoß ist ein kurzzeitiger Austausch von Wechselwirkungen zwischen zwei Körpern.

Es kommt zu einem zeitlich sehr begrenzten Auftreten von Kontaktkräften.

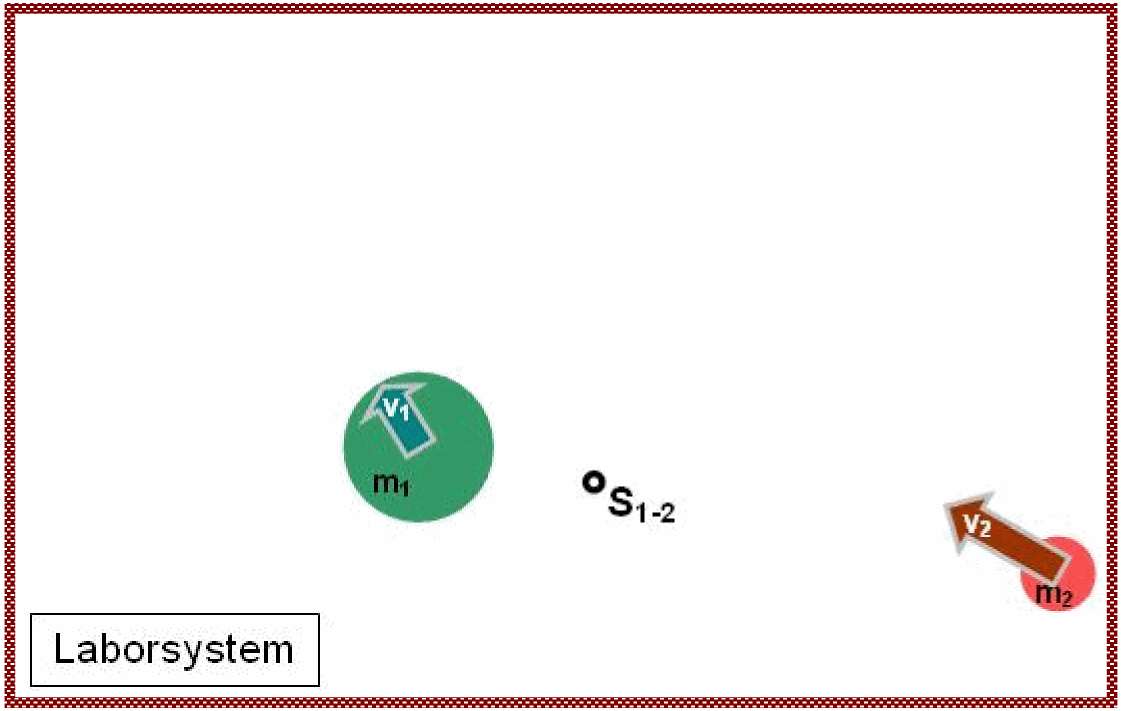
Stoßprozesse

Wir betrachten zwei Körper mit unterschiedlicher Masse und unterschiedlichen Geschwindigkeiten auf Kollisionskurs.



Stoßprozesse

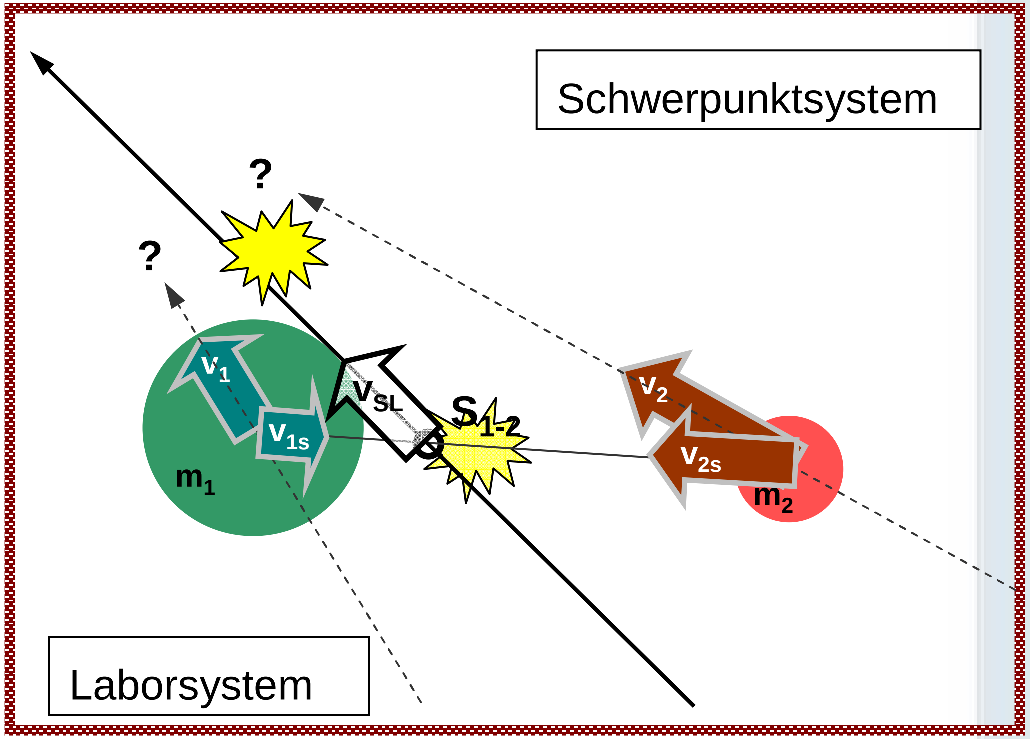
Mit Kenntnis des Schwerpunktsatzes können wir Aussagen über das System der beiden bewegten Massen und dessen Schwerpunkt $S_{1\text{-}2}$ machen.



Ohne Wissen über die Wechselwirkungen während des Stoß-vorganges, ist die Bewegung des Systemschwerpunkts bekannt.

Stoßprozesse

Die Systemschwerpunktsbewegung setzt sich gleichförmig fort. Damit kann man für die Betrachtung in ein System wechseln, das den Überblick vereinfacht.



Begibt man sich als Beobachter in das Schwerpunktsystem und bewegt sich mit diesem mit (praktischer Weise mit Ursprung in $S_{1\text{-}2}$), so wird:

v_1 zu v_{1s} … und

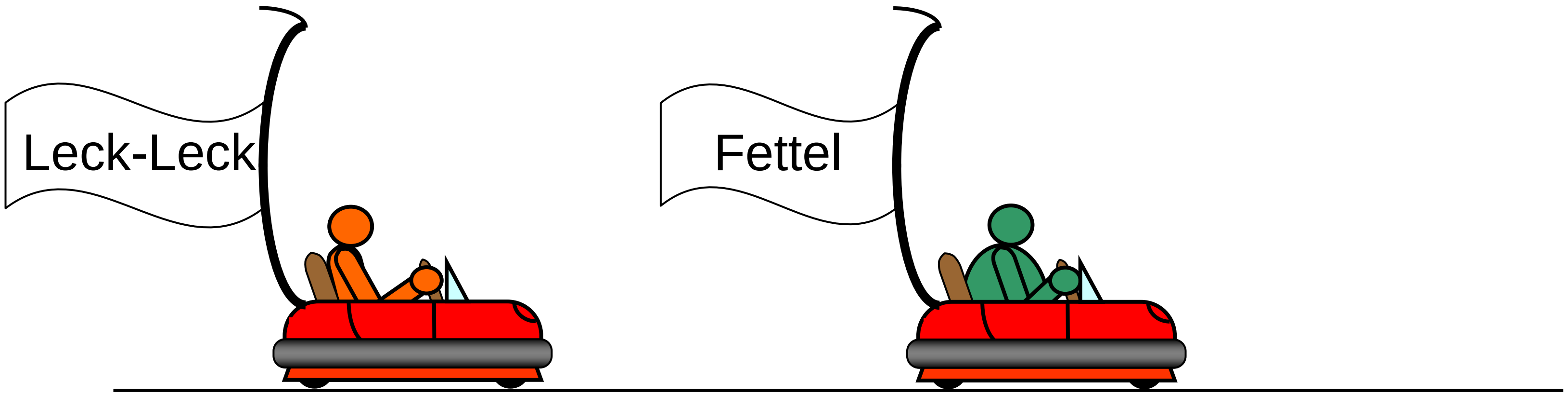
v_2 zu v_{2s}

und v_{sL} verschwindet,

womit der Wechsel ins Schwerpunktsystem vollzogen wäre. Da der Schwerpunkt sich im Laborsystem in der Symmetrie des Impulses bewegt, ist nun der Impuls permanent symmetrisch zum Ursprung.

Stoßprozesse

Bei Betrachtungen im Laborsystem erlauben uns die in einem abgeschlossenen System bekannten Erhaltungsgrößen, Aussagen über die Zustandsgrößen nach einem Stoßprozess zu machen, ohne die Wechselwirkungen im Detail abzubilden.

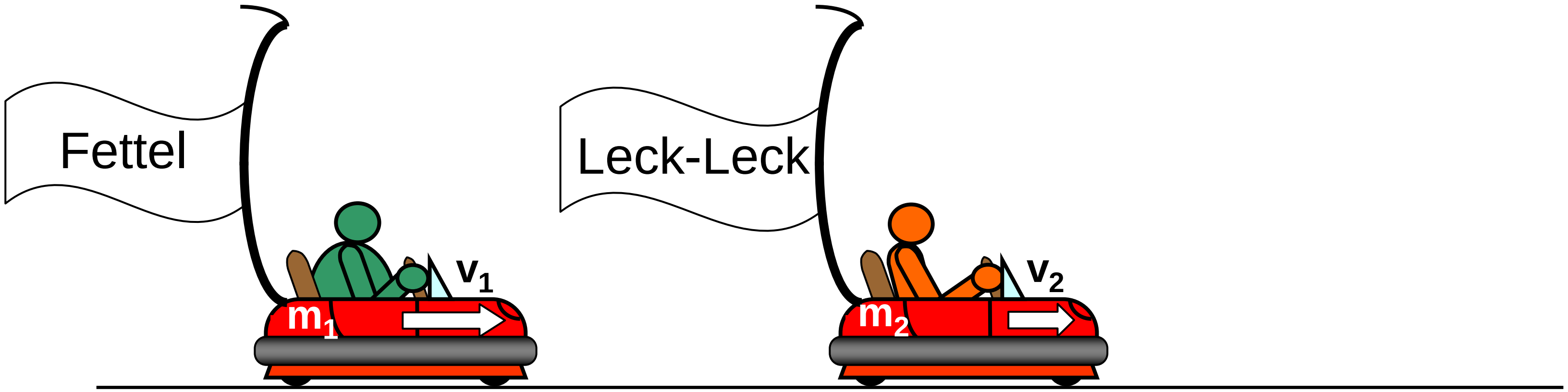


Unsere Betrachtungen hier beschränken sich auf zentrale Stöße, das heißt die Wechselwirkungen werden an der Oberfläche so ausgetauscht, dass die Wirklinie der Kräfte durch die Massenmittelpunkte geht.

Stoßprozesse

Betrachten wir zunächst einen vollkommen elastischen Stoßvorgang.

Das drückt sich in den Erhaltungssätzen so aus, daß die gesamte kinetische Energie, als solche nach dem Stoß unverändert im System erhalten sein muss.



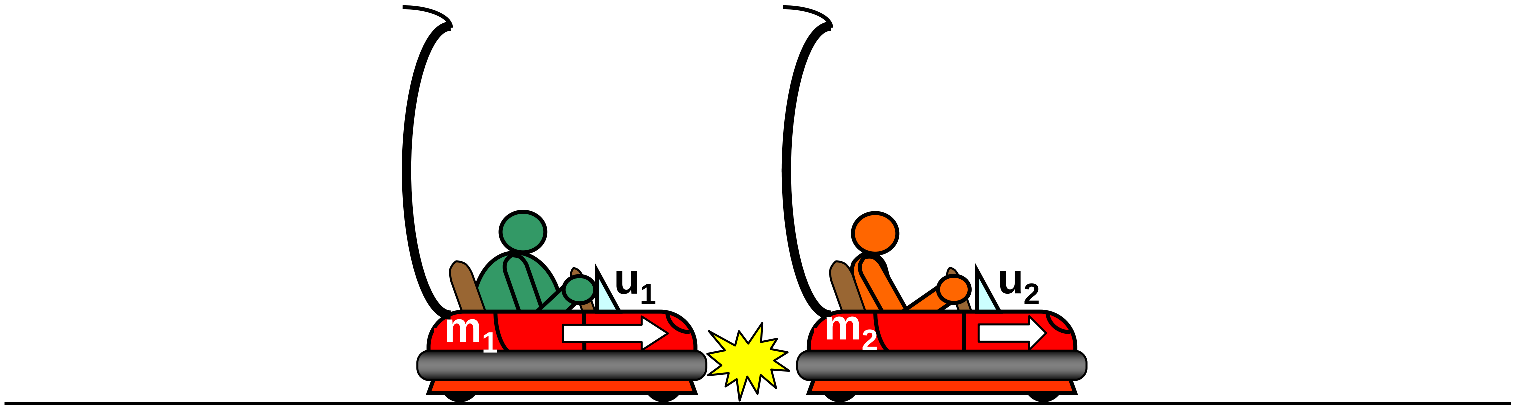
Die Gesamtenergie im System vor der Kollision ist rein kinetischer translatorischer Natur: $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2$ (richtungsunabhängig)

Der Gesamtimpuls im System vor der Kollision beträgt: $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$ (gerichtet)

Stoßprozesse

Damit ergibt sich die Energie nach dem Stoßvorgang als: $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$

und der Impuls: $m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$

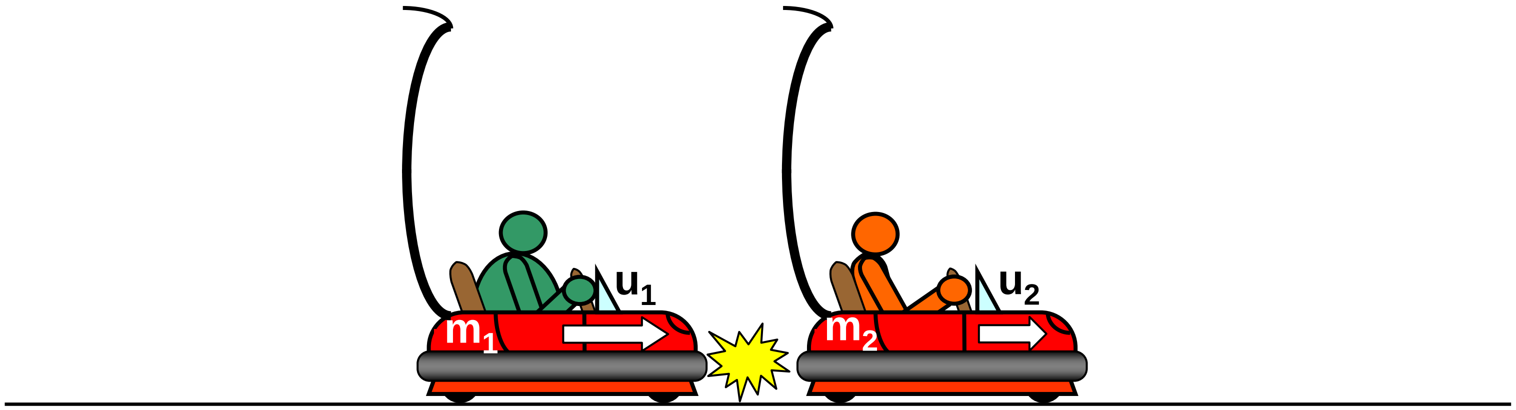


Somit muß gelten: $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$

und gleichzeitig: $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$

woraus sich die unbekannten Geschwindigkeiten $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ nach dem Stoß berechnen lassen.

Stoßprozesse

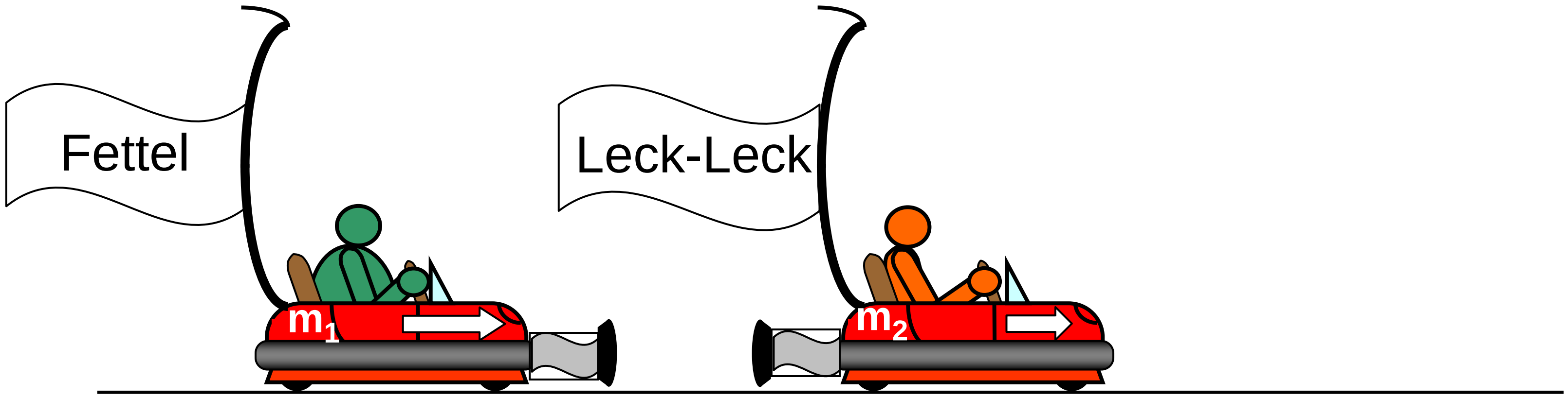


$$u_1 = (m_1 * v_1 + m_2 * (2 * v_2 - v_1))/(m_1 + m_2)$$

$$u_2 = (m_2 * v_2 + m_1 * (2 * v_1 - v_2))/(m_1 + m_2)$$

Stoßprozesse

Nach dem vollkommen elastischen Stoß betrachten wir das andere Extremum, den vollkommen unelastischen Stoß.

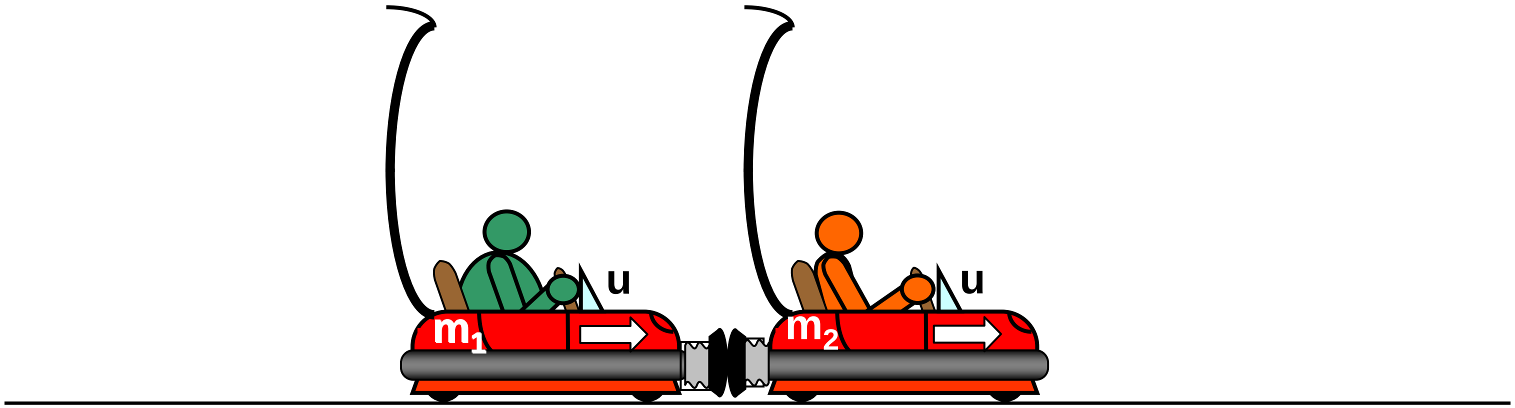


Vor dem Stoß sind die Verhältnisse unverändert, also bleibt auch die linke Seite der Impulsgleichung, wie sie war. Der vollkommen unelastische Stoß ist dadurch charakterisiert, dass ein Maximum an kinetischer Energie in innere Energie umgewandelt wird, was genau dann geschieht, wenn sich beide Stoßpartner schließlich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

Stoßprozesse

Damit gibt es auf der rechten Seite keine zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten, sondern nur mehr eine Geschwindigkeit $\vec{u}$.:

$$m_1 * \vec{v}_1 + m_2 * \vec{v}_2 = m_1 * \vec{u} + m_2 * \vec{u}$$

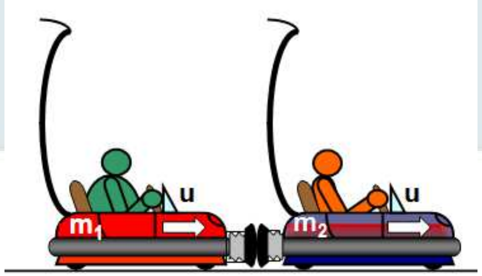


Die gewählte Randbedingung der vollkommenen Inelastizität ist so stringent, dass sich u alleine aus der Impulserhaltung eindeutig errechnen lässt:

$$u = (m_1 * v_1 + m_2 * v_2)/(m_1 + m_2)$$

Kinematik

Stoßprozesse



Die Energieerhaltung muss natürlich trotzdem weiter gelten:

Vor dem Stoß also:	und nach dem Stoß entsprechend:
$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2$	$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2$

Setzt man für u den aus dem Impulssatz errechneten Wert ein, ergibt sich eine Differenz von: $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2/(m_1 + m_2)$ **!!!!!**

Befremdlich, weil wir bisher unser Augenmerk lediglich auf kinetische Energien gerichtet hatten. Aber im Unterschied zum rein elastischen Stoß wird hier kinetische Energie umgewandelt. Und zwar in Umformarbeit und Wärme, die gemeinsam als innere Energie im System vorhanden sind.

So wird die Bilanz der Energieerhaltung im Fall eines völlig unelastischen Stoßes die maximale durch den Stoß erzeugbare innere Energie enthalten:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2 + U$$

U ist keine kinetische Energie, sondern innere Energie … (Wärme und Umformarbeit).

Stoßprozesse

Der Realfall zeigt natürlich Verhältnisse, die zwischen den beiden Extremen liegen. Ein Teil der kinetischen Energie wird während des Stoßvorgangs in Formänderungsarbeit und Wärme umgewandelt.

Um den Verlustanteil an kinetischer Energie erfassen zu können, wird die Stoßzahl k eingeführt, die die Geschwindigkeitsdifferenzen nach und vor dem Stoß in Beziehung setzt.

$$\boxed{k = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)/(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$$

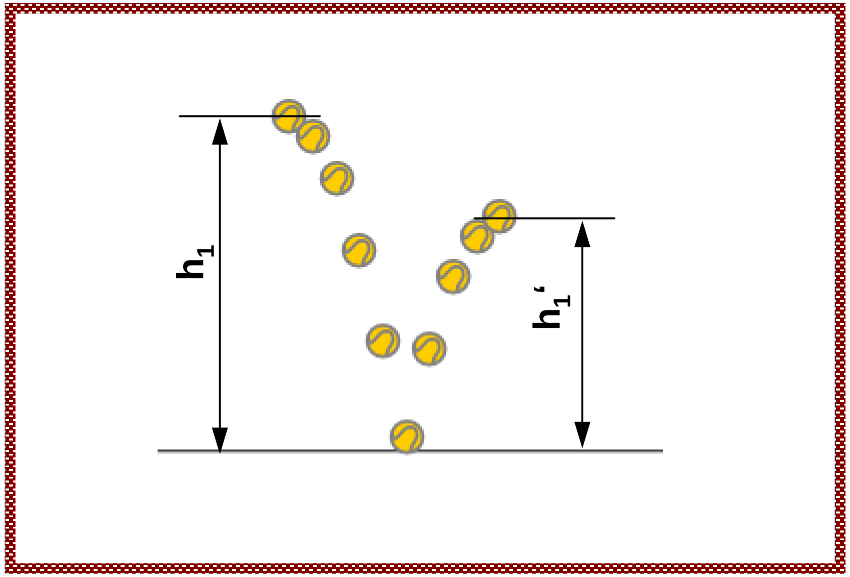
Diese Stoßzahl lässt sich im Fallversuch ermitteln, bei dem es sich um einen Stoßvorgang mit sehr unterschiedlich großen Massen handelt, wobei die eine als fast unendlich groß gegenüber der anderen angesehen werden kann.

Stoßprozesse

Selbst bei Vernachlässigung des Luftwiderstands würde ein springender Ball immer mehr an Höhe verlieren und kinetische Energie würde in Wärme umgewandelt.

Stoßprozesse

Die Stoßzahl ergibt sich im Fallversuch als:



$$\boxed{k = \sqrt{h_1'/h_1}}$$

k ist daher immer zwischen 0 und 1.

Stoßprozesse

Mit der Kenntnis von k lassen sich die Geschwindigkeiten der zwei Massen nach dem zentralen teilelastischen Stoß allgemein berechnen als:

$$u_1 = (m_1 * v_1 + m_2 * v_2 - m_2 * (v_1 - v_2) * k)/(m_1 + m_2)$$

$$u_2 = (m_1 * v_1 + m_2 * v_2 - m_1 * (v_2 - v_1) * k)/(m_1 + m_2)$$

und die Menge in innere Energie umgewandelte kinetischer Energie:

$$U = m_1 * m_2 * (v_1 - v_2)^2 * (1 - k)^2)/(2 * (m_1 + m_2))$$

eol ….

oder, falls Zeit bleibt

007

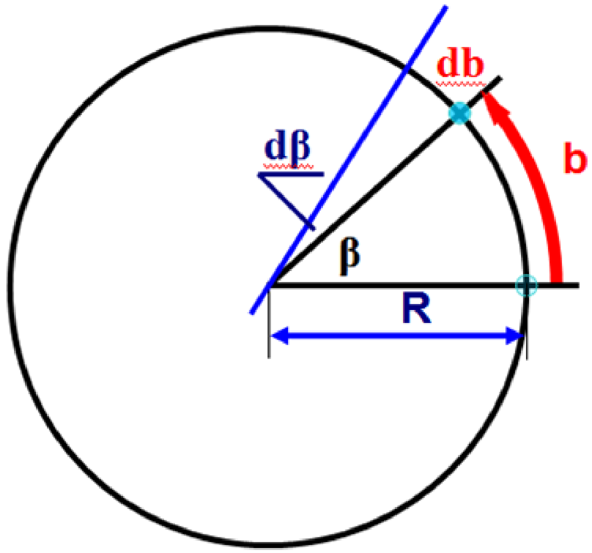
Übungsaufgabe Nr. 6 (Kinematik) Lösung

Sie befinden sich in einem Karussell, das sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 1,6 s^{-1} dreht und haben einen Achsabstand von R = 5 m.

a) Welche Momentangeschwindigkeit haben Sie?

b) Welcher Umdrehungszahl (U/min) entspricht die Geschwindigkeit?

Lösung:



a)

$\omega = d\beta/dt$

$v = db/dt$ mit $db = R^* \, d\beta$

$\mathbf{v = R^* \, d\beta/dt}$

$\mathbf{= 5m^*1{,}6^{s-1} = 8\ m/s = 28{,}8\ km/h}$

b)

$U_K = 2^*R^*\pi = 31{,}416\ m$

$T_1 = U_K/v = 31{,}416/8 = 3{,}927\ s$

$\mathbf{U/min = 60\ s/T_1 = 60\ s/3{,}927\ s}$

$\mathbf{= 15{,}279}$

Übungsaufgabe Nr. 7 (Kinematik) Lösung

Sie schlendern auf dem Camino del Rey und kommen von links an die dargestellte Stelle, an der 3,8m Weg fehlen. Die Fortsetzung des Weges rechts liegt 0,8m tiefer. Mit welcher Geschwindigkeit müssen Sie (horizontal) anlaufen, um sicheren Fußes auf der anderen Seite landen zu können? ($g = 10 m/s^2$, Absprung nur horizontal)

Lösung: 2 unabhängige Bewegungskomponenten ... Superposition der Bewegungsgleichungen horizontal und vertikal

Sprungweite $s_h = s_{0h} + v_{0h}*t + (1/2)*a_h*t^2$ ... ... $s_v = s_{0v} + v_{0v}*t + (1/2)*a_v*t^2$

$s_h = 0 + v_{0h}*t + 0$

$s_v = 0 + 0 + (1/2)*g*t^2$

$0{,}8 = 0 + 0 + 5*t^2$

$t^2 = 0{,}16$

$t = 0{,}4 \text{ s}$

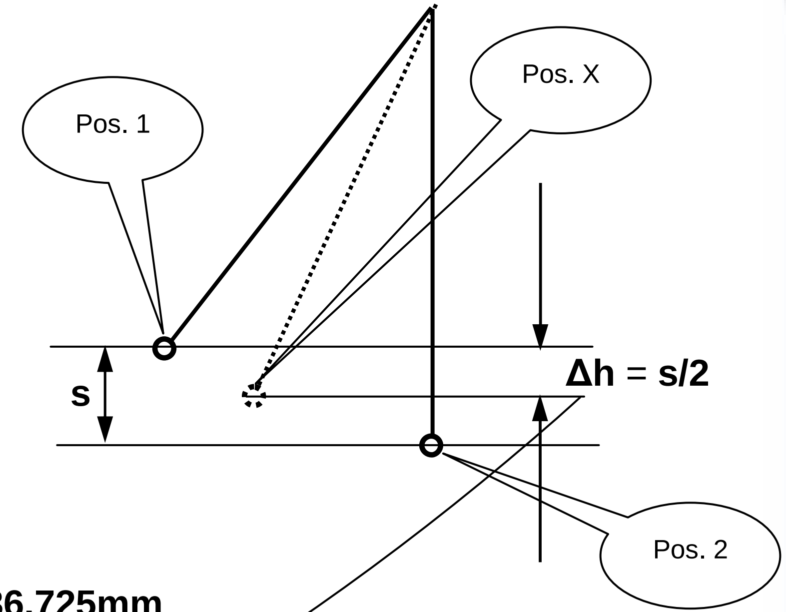
$3{,}8 = v_{0h}*0{,}4$

$\mathbf{v_{0h} = 3{,}8/0{,}4 = 9{,}5 \text{ m/s}}$

... viel Vergnügen beim Anlauf!

Übungsaufgabe Nr. 8 (Kinematik) Lösung

Ein verlustloses Pendel mit masselosem Faden der Länge l = 300 mm startet an der Position einer Auslenkung von 0,5 rad im Schwerkraftfeld der Erde ($g = 10 m/s^2$) zu schwingen. Welche Tangentialgeschwindigkeit hat das Pendel an der Stelle gleich großer potentieller, wie kinetischer Energie?



Lösung: z. B.: Energieerhaltung

Potentielle Energie bei Start: $E_{0pot} = m*g*h$

Kinetische Energie bei Start: $E_{0kin} = 0$

Mit Starthöhe $s = l*(1- \cos(0{,}5rad)) = 300*(1 – 0{,}87758) = 36{,}725mm$

Lösungskriterium: $E_{pot}(x) = E_{kin}(x)$

und $E_{pot}(x) + E_{kin}(x) = E_{0pot} = m*g*s$ … Gesamtenergie = const.

E_{pot} … direkt proportional Δh → $E_{pot} = E_{kin}$ bei s/2

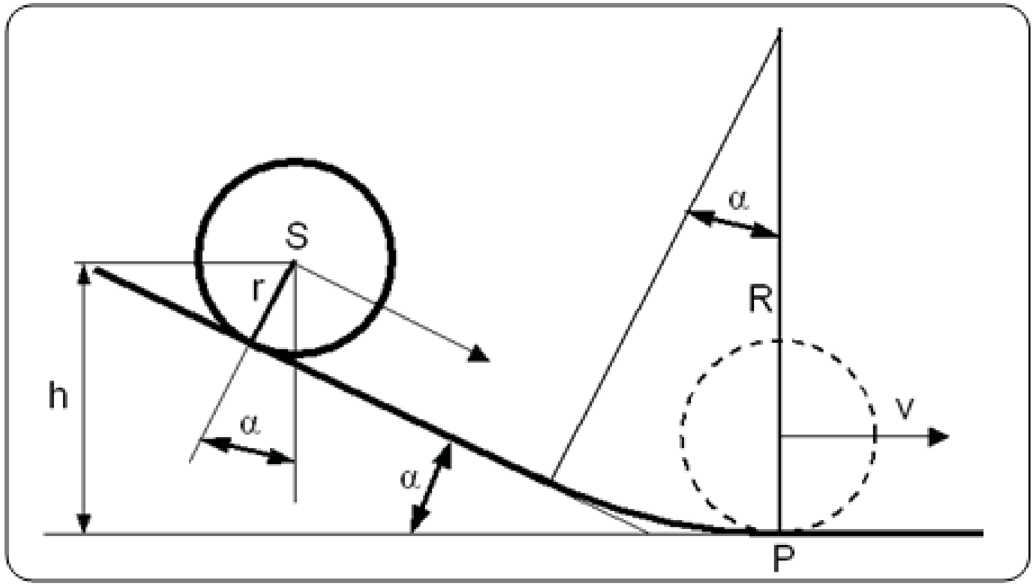
	E_{kin}	E_{pot}	$E_{kin} + E_{pot}$
Pos. 1	0	m*g*s	const
Pos. X	$m*v_x^2/2$	m*g*s/2	const
Pos. 2	$m*v_{max}^2/2$	0	const

Also $m*g*\Delta h = m*v_x^2/2$ bzw.: $v_x^2 = 2*g*\Delta h = g*s = 367\,250 mm^2/s^2$

---> $v_x = 606{,}011551 mm/s = 0{,}606 m/s = 2{,}1816\ km/h$

Bei v an der Position x, also v_x ist erst die Hälfte der potentiellen Energie in kinetische Energie umgewandelt.

Übungsaufgabe Nr. 9 (Kinematik)



Die Walze mit der Masse m und dem Radius r beginnt, wie in der Skizze ersichtlich, aus der Höhe h zufolge Schwerkraft *reibungsfrei* auf der schiefen Ebene zu gleiten und erreicht schließlich, nach einem, mit Radius R, gekrümmten Übergang in P die Ebene. *(Etwaige Rotationsanteile mit Radius R sind zu vernachlässigen.)*

a) Welche Geschwindigkeit v hat die Walze bei Erreichen von P?
b) In gleicher Anordnung rollt die Walze (Massenträgheitsmoment $J_s = ½*m*r^2$) verlustfrei, ohne Rutschen. Welche Geschwindigkeit v erreicht sie dann in P?
c) In welchem der beiden Fälle a) oder b) ist die Walze schneller? Mit Begründung!

Übungsaufgabe Nr. 10 (Kinematik)

Übungsbeispiel: Mit dem Fahrrad auf den Kahlenberg

Mit dem Fahrrad zusammen haben Sie eine Masse von 80 kg. Sie möchten von Nußdorf auf den Kahlenberg fahren (Höhenunterschied ~ 300 m). Ihre physische Leistung beträgt 200 Watt.

In welcher Zeit erreichen Sie Ihr Fahrziel?

(Alle Verluste vernachlässigt)

Übungsaufgabe Nr. 11 (Kinematik)

Übungsbeispiel: Mit dem Fahrrad auf den Kahlenberg +

Welche Leistung benötigen Sie, wenn Sie mit dem Rad zusammen 100 kg Masse aufweisen und die gleiche Zeit brauchen wollen, wie Ihr Konkurrent aus Aufgabe Nr. 8?

(Alle Verluste vernachlässigt)

Übungsaufgabe Nr. 12 (Kinematik)

Übungsbeispiel JoJo:

Wie oft dreht sich das Jojo pro Sekunde nach einem Fall aus 1m Höhe?

r_1 = 5mm

r_2 = 35mm