

Einführung in die Finite Elemente Methoden - Rechenbeispiel

Problemstellung

Sie haben die Aufgabe die in Abbildung 1 gezeigte Lochplatte unter einer einachsiger Belastung auszulegen. Um ein Versagenskriterium an den kritischen Stellen der Platte anwenden zu können, benötigen Sie die Kenntnis über das vorliegende Spannungsfeld. Die Platte hat eine Länge und Breite von $a = 1$ m eine Dicke von $h = 10$ mm und einen Lochdurchmesser von $d = 40$ mm. Da die folgende Analyse unter der Annahme linearisierter Verzerrungen und eines linear-elastischen Materialgesetzes erfolgen soll, ist die Lösung proportional zur aufgetragenen Spannung σ_0 . Es ist folglich möglich die Lösung für $\sigma_0 = 1$ MPa zu berechnen und anschließend die Lösung auf jede gewünschte Spannung zu skalieren. Das isotrope Materialverhalten ist durch die elastischen Konstanten $E = 210$ GPa und $\nu = 0.3$ gegeben.

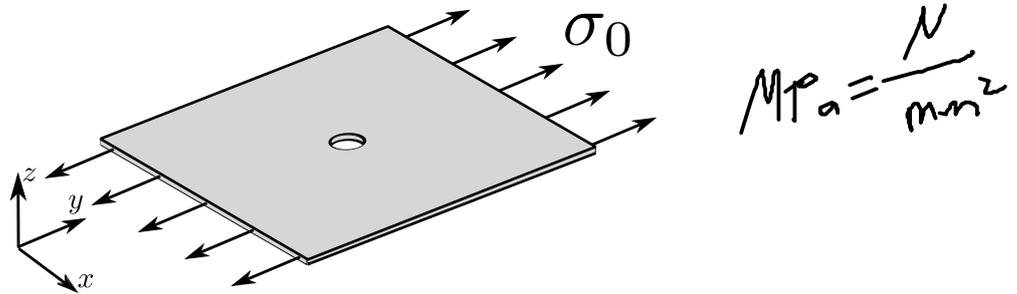


Abbildung 1: Lochplatte.

Ebener Spannungszustand. Da die Dicke h der Platte sehr klein gegenüber deren Länge und Breite a ist, und die Belastung nur in der Plattenebene angebracht wird, lässt sich das Problem durch die Annahme eines ebenen Spannungszustand vereinfachen. Die Annahmen für den ebenen Spannungszustand lauten:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= & \sigma_{zz} &= \\ \sigma_{yy} &= & \sigma_{xz} &= \\ \sigma_{xy} &= & \sigma_{yz} &= \end{aligned}$$

Die Lösung ist dadurch vollständig durch die Lösung der Mittelebene ($z = 0$) definiert und hängt somit nur von x und y ab. Das Randwertproblem ist folglich nur noch ein zweidimensionales Problem. Die lokale Gleichgewichtsbedingung mit $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{pmatrix}$ lautet

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^T \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\underline{q}}.$$

Dabei ist $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$ die Differentialoperatormatrix für den ebenen Spannungszustand, gegeben durch

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Differentialoperatormatrix lassen sich auch die linearisierten Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen mit $\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$ und $\underline{\underline{u}}^T = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ durch

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{u}}, \quad \varepsilon_{zz} \neq 0$$

ausdrücken. Das Materialgesetz für den ebenen Spannungszustand ist durch

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

gegeben. Zusätzlich werden noch Randbedingungen benötigt um das zugehörige Randwertproblem zu lösen. Diese lauten

$$\sigma_{yy}(x, y = a/2) = -\sigma_{yy}(x, y = -a/2) = \sigma_0. \quad (1)$$

Setzt man die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung in das Materialgesetz und dieses in die lokale Gleichgewichtsbedingung ein, erhält man

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{u}} = -\underline{\underline{q}}. \quad (2)$$

Die Lösung des Problems erhält man nun in Form des Verschiebungsfelds, dass die partielle Differentialgleichung in Gleichung 2 und gleichzeitig die Randbedingungen aus Gleichung 1 erfüllt.

Analytische Lösung

Für den Fall einer unendlich ausgedehnten Platte, gibt es eine analytische Lösung des Problems. Die x -Komponente des lösenden Verschiebungsfeldes ist in Abbildung 2b und die yy -Komponente des resultierenden Spannungsfelds ist in Abbildung 2a dargestellt. Sind die Abmessungen der Platte sehr groß gegenüber des Lochdurchmessers, lässt sich die analytische Lösung als Vergleich zu einer Lösung mittels der Finite Elemente Methode heranziehen. Im folgenden wollen wir den in Abbildung 2b als blaue Linie markierten Verlauf von u entlang der x -Achse zur genaueren Untersuchung verwenden.

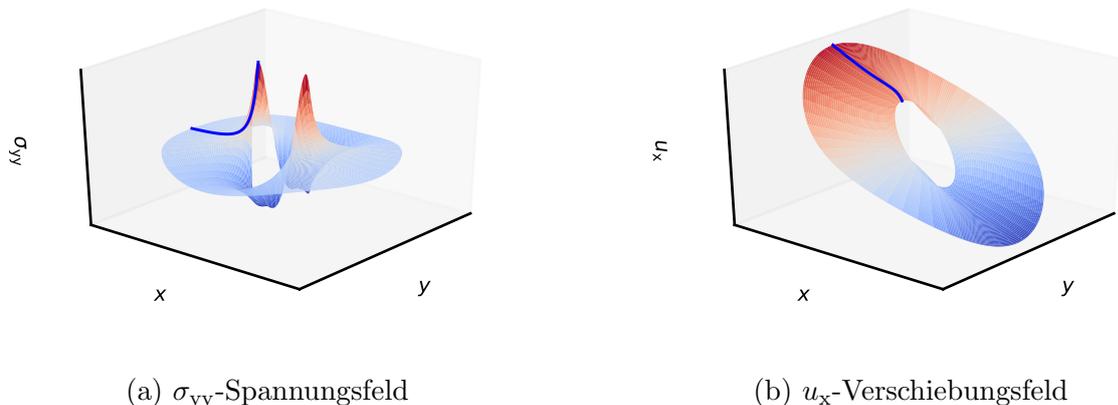


Abbildung 2: Vektorfelder der analytischen Lösung in der unmittelbaren Umgebung des Lochs.

Finite Elemente Approximation des Verschiebungsfelds

Für komplexe Geometrien lässt sich häufig keine analytische Lösung für die partielle Differentialgleichung aus Gleichung 2 finden und es müssen numerische Methoden verwendet werden um die Lösung zu approximieren. Sehr populär ist die Finite Elemente Methode, mit der nun im Folgenden das beschriebene Randwertproblem gelöst werden soll. Die Lösung wird bei der Finiten Elemente Methode dabei als Funktion der Verschiebungen an diskreten Punkten (Knoten) im Bauteil gesucht. Das Verschiebungsfeld \vec{u} dazwischen wird mithilfe dieser Knotenpunktsverschiebungen \underline{U} durch auf endlich große Teilbereiche (Finite Elemente) beschränkte Interpolationsfunktionen $\varphi^{(e)}$ durch den Zusammenhang

$$\vec{u}(x, y, z) = \underline{\varphi}^{(e)T} \underline{U}^{(e)} \quad (3)$$

interpoliert. Das Vorgehen soll nun anhand der Abbildung 3 verdeutlicht werden. Die rote Kurve stellt den in Abbildung 2b markierten Verlauf der analytischen Lösung der Verschiebung u entlang der x -Achse dar. Die blau strichlierte Kurve stellt die Finite Elemente Lösung dar, die im Laufe dieser Rechenübung erarbeitet werden soll und zu diesem Zeitpunkt strenggenommen noch unbekannt ist. Sie ist in Form der Knotenpunktsverschiebungen $U_{v_1}^{(e)}, U_{v_2}^{(e)}, U_{v_3}^{(e)}$ der Knoten bei $y = (-4.0, -3.0, -2.0)$ gegen. Der Beitrag der Knotenpunktsverschiebung $U_{v_i}^{(e)}$ wird durch die Multiplikation dieser mit der zugehörigen Interpolationsfunktion φ_{v_i} bestimmt. Die einzelnen Beiträge der drei Knoten sind durch die grüne, violette und orange Kurve dargestellt. Die Summe der einzelnen Beiträge ergibt schlussendlich die strichlierte Finite Elemente Lösung. Durch dieses Vorgehen ist das Verschiebungsfeld \vec{u} nun vollständig durch die Knotenpunktsverschiebungen \underline{U} definiert und diese dienen als Unbekannte die es im Folgenden zu bestimmen gilt. Diese Form der Approximation erfordert, dass die Interpolationsfunktionen die Bedingung

$$\left. \begin{matrix} \varphi_{u_j}(x, y, z) \\ \varphi_{v_j}(x, y, z) \\ \varphi_{w_j}(x, y, z) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{für } x, y, z = x_i, y_i, z_i \\ 0 & \text{für } x, y, z = x_j, y_j, z_j \end{cases} \quad \text{mit } i \neq j$$

erfüllen.

$$u = \varphi_{u_1} U_{u_1} + \varphi_{u_2} U_{u_2} + \varphi_{u_3} U_{u_3}$$

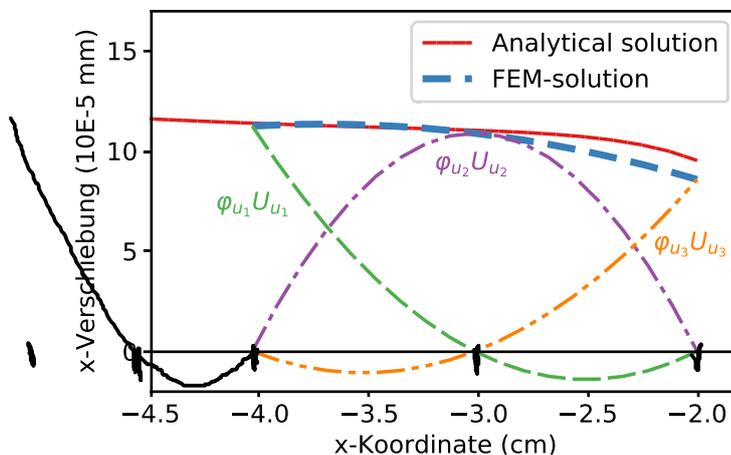
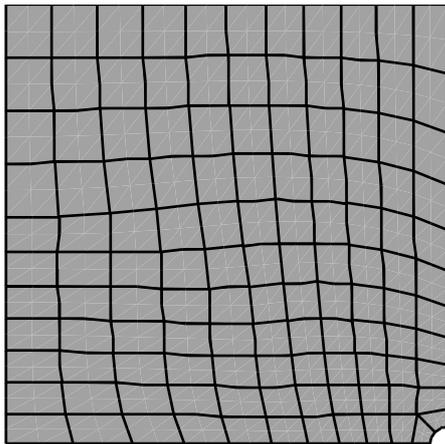


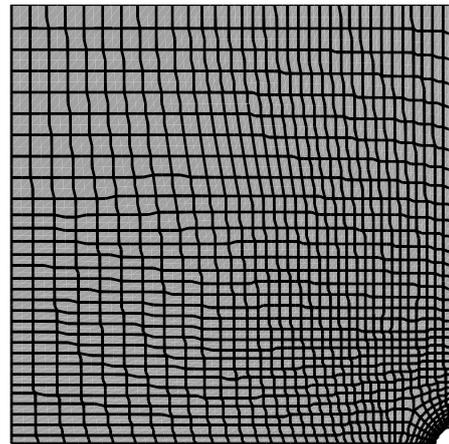
Abbildung 3: Finite Elemente Approximation des Verschiebungsfelds.

Ablauf Finite Elemente Analyse

Da die Geometrie, die Belastung, das Material und die Lösung des gegebenen Problems symmetrisch bezüglich der x - und y -Achse sind, genügt es nur ein Viertel des Modells zu betrachten. Um die Symmetrie der Lösung zu gewährleisten, müssen jedoch entsprechende Symmetrie-Randbedingungen entlang der x - und y -Achse verwendet werden. Im nächsten Schritt muss das zu lösende Gebiet diskretisiert, also in viele Finite Elemente unterteilt werden. Dieser Vorgang wird Vernetzung genannt. In Abbildung 4a und 4b sind eine grobe und eine feine Vernetzung eines Viertels der Lochplatte zu sehen.



(a) Grobe Vernetzung.



(b) Feine Vernetzung.

Abbildung 4: Diskretisierung des zu lösenden Problems.

Nachdem das Modell vernetzt ist, beginnt der eigentliche Lösungsvorgang. Dieser setzt sich aus folgenden Teilschritten zusammen, auf die im anschließenden Teil des Beispiels weiter eingegangen wird.

Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix

Zu Beginn des Lösungsvorgangs muss die Elementsteifigkeitsmatrix für jedes Element berechnet werden. Dies beinhaltet die Auswertung eines Integrals, welches in der Regel in ein lokales, normiertes Koordinatensystem (isoparametrische Elemente) transformiert wird. Die dazu erforderlichen Schritte sollen nun anhand des Elements (120) in der Abbildung 5 demonstriert werden.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Im Zuge der verschiebungsorientierten Finite Elemente Methode reduziert man die Anforderung an die Lösung des Verschiebungsfelds in der Form, dass es die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr im differentiellen Sinne wie in Gleichung 2, sondern nur noch im integralen Sinne über den betrachteten Körper erfüllen muss. Dies entspricht dem Prinzip der virtuellen Arbeit (P.d.v.A.), das besagt, dass ein Körper im Gleichgewicht ist, wenn die virtuelle Arbeit der inneren und äußeren Kräfte bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage gleich Null ist:

$$\delta A = \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0$$

$$\delta A^{(a)} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{u}_i + \int_{\partial V} \vec{q}_0 \cdot \delta \vec{u}_0 dO + \int_{V_{\text{ext}}} \vec{q}_v \cdot \delta \vec{u} dV \quad (4)$$

$$\delta A^{(i)} = - \int_{V_{\text{el}}} \underline{\underline{\xi}}^T \delta \underline{\underline{\xi}} dV \quad (5)$$

Schneidet man ein einzelnes Element aus dem Körper frei, wobei die zuvor wirkenden inneren Kräfte nun als äußere Kräfte auf das Element wirken und geht davon aus, dass diese inneren Kräfte und die an sich wirkenden äußeren Kräfte nur an den Element-Knoten angreifen, gilt das P.d.v.A. in der Form

$$\int_{V_{\text{el}}^{(e)}} \underline{\underline{\xi}}^T \delta \underline{\underline{\xi}} dV_{\text{el}}^{(e)} = \underline{\underline{F}}^{(e)T} \delta \underline{\underline{U}}^{(e)} \quad (6)$$

auch auf der Elementebene. Allerdings gilt dies nur, wenn zuvor alle Volumens- oder Oberflächenkraftdichten in konsistenter Weise in Einzelkräfte umgerechnet wurden. Leitet man nun die Interpolationsfunktionen aus Gleichung 3 mithilfe des Differentialoperators $\underline{\underline{d}}$ ab, erhält man die Verzerrungsinterpolationsmatrix

$$\underline{\underline{D}}^{(e)} = \underline{\underline{d}} \underline{\underline{f}}^{(e)T}(x, y, z) \quad (7)$$

mit der sich die Verzerrungen $\underline{\underline{\xi}}$ und die virtuellen Verzerrungen $\delta \underline{\underline{\xi}}$ durch

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\xi}} &= \underline{\underline{D}}^{(e)} \underline{\underline{U}}^{(e)} \\ \delta \underline{\underline{\xi}} &= \underline{\underline{D}}^{(e)} \delta \underline{\underline{U}}^{(e)} \end{aligned}$$

aus den Knotenpunktverschiebungen und den virtuellen Knotenpunktverschiebungen berechnen lassen. Damit lässt sich Gleichung 6 zu

$$\int_{V_{\text{el}}^{(e)}} \underline{\underline{\xi}}^T \underline{\underline{D}}^{(e)} dV_{\text{el}} \delta \underline{\underline{U}}^{(e)} = \underline{\underline{F}}^{(e)T} \delta \underline{\underline{U}}^{(e)}$$

$$\begin{aligned}
 x &= a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r^2 + a_5 r s + a_6 s^2 + a_7 r^2 s + a_8 r s^2 \\
 y &= b_1 + b_2 r + b_3 s + b_4 r^2 + b_5 r s + b_6 s^2 + b_7 r^2 s + b_8 r s^2
 \end{aligned}$$

Für jeden der 8 Knoten lässt sich eine Gleichung durch einsetzen dessen Koordinaten die Gleichungen 9 und 9 aufstellen. Diese 8 Gleichungen lassen sich anschließend nach den 8 Unbekannten auflösen. Die interpolierte Geometrie lässt sich folglich durch die x -Koordinaten $\tilde{X}_x^{(e)}$ und die y -Koordinaten $\tilde{X}_y^{(e)}$ der 8-Knoten des Elementes durch

$$\begin{aligned}
 x &= \tilde{N}^T \tilde{X}_x^{(e)} \\
 y &= \tilde{N}^T \tilde{X}_y^{(e)}
 \end{aligned}$$

ausdrücken. Für das isoparametrische Viereck-Element ist der Vektor \tilde{N}^T mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
 N_i(r, s) &= \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i) (r r_i + s s_i - 1) && \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\
 N_i(r, s) &= \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + s s_i) && \text{für } i = 5, 7 \\
 N_i(r, s) &= \frac{1}{2} (1 + r r_i) (1 - s^2) && \text{für } i = 6, 8
 \end{aligned}$$

durch

$$\tilde{N}^T = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8)$$

gegeben. Fasst man nun die x -Koordinaten $\tilde{X}_x^{(e)}$ und die y -Koordinaten $\tilde{X}_y^{(e)}$ zu einem Vektor $\tilde{X}^{(e)}$ zusammen, lässt sich eine beliebiger Ortsvektor \vec{x} im Element mit

$$\tilde{N}^T = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{pmatrix}$$

durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \tilde{N}^{(e)T} \tilde{X}^{(e)}$$

angeben. Für isoparametrische Elemente sind die Interpolationsfunktionen für die Geometrie die gleichen wie für das Verschiebungsfeld. Es gilt mit dem Gesamtknotenpunktverschiebungsvektor $\tilde{U}^{(e)}$ somit

$$\vec{u} = \tilde{N}^{(e)T}(r, s) \tilde{U}^{(e)}$$

Da die Ansatzfunktionen nun im Bildraum definiert sind, der für alle Elemente gleich ist, kann die Induzierung mit dem Elementindex (e) unterbleiben.

Integral-Transformation. Im zweidimensionalen Fall ist die Elementsteifigkeitsmatrix durch

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{D}^{(e)T} \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)} h(x,y) dA$$

gegeben. Nutzt man nun die Koordinatentransformation in den Bildraum, lässt sich die Integralauswertung vereinfachen. Das Flächenelement ändert sich dadurch von $dA = dx dy$ zu $dA = \det \tilde{\mathbf{J}}^{(e)} dr ds$. Wobei $\tilde{\mathbf{J}}^{(e)}$ die Jakobi-Matrix der Transformation für das entsprechende Element ist.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}^{(e)} &= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mathbf{D}^{(e)T}(x,y) \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)}(x,y) h(x,y) dx dy \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^{(e)T}(r,s) \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)}(r,s) \det \tilde{\mathbf{J}}^{(e)}(r,s) h(r,s) dr ds \end{aligned}$$

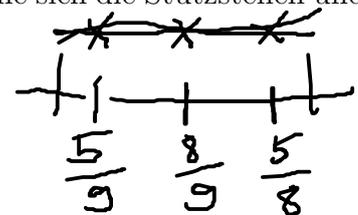
Gauß'sche Integration

Die tatsächliche Integralauswertung wird in der Regel numerisch durchgeführt, wobei das Integral durch eine gewichtete Summe von Funktionswerten an bestimmten Stützstellen approximiert wird. Für die eindimensionale Integration mit m Stützstellen gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m f(x_i) w_i.$$

Die Wahl der Stützstellen ist dabei bei der Gauß'schen Integration so optimiert, dass sich Polynome vom Grad $(2m - 1)$ durch eine Gauß'sche Integration mit m Stützstellen exakt integrieren lassen. Für eine drei Punkt Gauß'sche Integration ergeben sich die Stützstellen und Gewichte zu:

Stützstelle	0	$\pm\sqrt{3/5}$
Gewicht	8/9	5/9



Für biquadratisch interpolierte, verzerrte Element ist es empfohlen eine 3×3 -Integration zu verwenden.

$\tilde{\omega}$ n-Richtung
 $\hat{\omega}$ s-Richtung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}^{(e)} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^{(e)T} \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)} h \det(\tilde{\mathbf{J}}^{(e)}) dr ds \quad (9) \\ &= \sum_{i,j} \mathbf{D}^{(e)T}(r_i, s_j) \mathbf{E} \mathbf{D}^{(e)}(r_i, s_j) \det(\tilde{\mathbf{J}}^{(e)})(r_i, s_j) h(r_i, s_j) \tilde{\omega}_i \hat{\omega}_j \quad (10) \end{aligned}$$

Im Folgenden sollen nun die Integranden für den in Abbildung 5 dargestellten Integrationspunkt IP3 des Element (120) berechnet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Funktionen von (r, s) sind und zur vollständigen Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix an jedem Integrationspunkt ausgewertet werden müssen.

Jakobi-Matrix. Die Jakobi-Matrix $\mathbf{J}^{(e)}$ beschreibt den Zusammenhang der Ableitungen im Bildraum und im Originalraum und ist durch

$$\mathbf{x} = \underset{\sim}{\mathbf{N}}^T \mathbf{X}_x^{(e)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{J}}^{(e)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definiert. Dies lässt sich durch Verwendung der Ansatzfunktionen zu

$$\underset{\sim}{\mathbf{J}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \underset{\sim}{\mathbf{N}}^T(r,s) \mathbf{X}_x & \frac{\partial}{\partial r} \underset{\sim}{\mathbf{N}}^T(r,s) \mathbf{X}_y \\ \frac{\partial}{\partial s} \underset{\sim}{\mathbf{N}}^T(r,s) \mathbf{X}_x & \frac{\partial}{\partial s} \underset{\sim}{\mathbf{N}}^T(r,s) \mathbf{X}_y \end{pmatrix}$$

umformen. Die Ableitungen der Interpolationsfunktionen ist durch

$$\frac{\partial}{\partial r} \underset{\sim}{\mathbf{N}}(r,s) = \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(-s+1) + \frac{1}{4}(-s+1)(r-s-1) \\ \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(s+1) + \frac{1}{4}(s+1)(r+s-1) \\ -\left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(s+1) - \frac{1}{4}(s+1)(-r+s-1) \\ -r(-s+1) \\ -\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} \\ -r(s+1) \\ \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \underset{\sim}{\mathbf{N}}(r,s) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(-s+1) - \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(r-s-1) \\ \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(s+1) + \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(r+s-1) \\ \left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(s+1) + \left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{4}\right)(-r+s-1) \\ \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \\ -2s\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} \\ -2s\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese müssen nun am Integrationspunkt IP3 ausgewertet werden, dessen (r,s) -Koordinaten

$$r_{\text{IP3}}^{(120)} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$s_{\text{IP3}}^{(120)} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

sind. Es ergibt sich folglich für den Integrationspunkt IP3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{N}_{IP3}^T &= \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{15}}{20} - \frac{9}{20} & -\frac{\sqrt{15}}{20} - \frac{3}{20} & \frac{9}{20} - \frac{3\sqrt{15}}{20} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} - \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{N}_{IP3}^T &= \begin{pmatrix} \frac{9}{20} + \frac{3\sqrt{15}}{20} & \frac{\sqrt{15}}{20} - \frac{3}{20} & \frac{3\sqrt{15}}{20} - \frac{9}{20} & -\frac{\sqrt{15}}{5} - \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{15}}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Element-Knotenpunktskoordinaten des Elements (120) im Originalraum

$$\begin{aligned} \tilde{X}_x^{(120)T} &= (-40.33 \quad -20. \quad -14.11 \quad -34.15 \quad -30.17 \quad -18.47 \quad -24.13 \quad -37.24) \\ \tilde{X}_y^{(120)T} &= (0.0 \quad 0.0 \quad 14.18 \quad 34.36 \quad 0.0 \quad 7.67 \quad 24.27 \quad 17.18) \end{aligned}$$

lässt sich nun die Jakobimatrix am Integrationspunkt IP3 berechnen:

$$\mathbf{J}_{\tilde{IP3}}^{(120)} = \begin{pmatrix} 9.9661.019 \\ -1.021 \quad 9.026 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Jakobimatrix ergibt sich dadurch am Integrationspunkt IP3 zu

$$\det(\mathbf{J}_{\tilde{IP3}}^{(120)}) =$$

Verzerrungsinterpolationsmatrix. Als weiterer Integrand muss noch die Verzerrungsinterpolationsmatrix am Integrationspunkt IP3 ausgewertet werden. Diese ist durch deren Definition in Gleichung 7 durch

$$\mathbf{D}_{\tilde{e}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{N}^T(r, s) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \frac{\partial}{\partial y} \tilde{N}^T(r, s) \\ \frac{\partial}{\partial y} \tilde{N}^T(r, s) & \frac{\partial}{\partial x} \tilde{N}^T(r, s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\tilde{e}}^{(e)} &= \mathbf{D}_{\tilde{e}}^{(e)} \mathbf{J}_{\tilde{IP3}}^{(120)T} \\ &= \mathbf{D}_{\tilde{e}}^{(e)} \mathbf{J}_{\tilde{IP3}}^{(e)T}(r, s) \end{aligned}$$

gegeben. Allerdings sind die Interpolationsfunktionen \tilde{N} Funktionen von r und s und die Ableitungen bezüglich x und y lassen sich nicht ohne Weiteres durchführen. Durch die Inverse der Jakobimatrix lassen sich jedoch die Ableitungen nach x und y durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} &= \mathbf{J}_{\tilde{e}}^{(e)-1}(r, s) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{J}_{\tilde{e}}^{(e)})} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

durch die Ableitungen nach r und s ausdrücken. Wendet man dies z.B. auf die Interpolationsfunktion $N_1(r, s)$ an erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_{1 IP3}^T &= \frac{1}{\det \mathbf{J}_{\tilde{e}}^{(e)}} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial N_1}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial N_1}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{J}_{22}} \mathbf{J}_{12} \\ &= 0,03393 \end{aligned}$$

$$IP3 = 3,1$$

r s

Integrationspunkten ausgewertet werden. Dies führt zur Matrix:

$$[\Psi_{ij,1,1}] = \begin{bmatrix} 6134289.95 & 1144702.53 & 158456.40 \\ 613081.18 & 0 & 399197.44 \\ \text{[circled]} & 384652.03 & 121181.49 \end{bmatrix}$$

Ordnet man die Gewichte in einer weiteren Matrix

$$\left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9} \right)$$

$$[\bar{w}_i \hat{w}_j] = \begin{bmatrix} \frac{25}{81} & \frac{40}{81} \\ & \frac{64}{81} \end{bmatrix}$$

an (\bar{w}_i sind die Gewichte in Richtung r und \hat{w}_j sind die Gewichte in Richtung s), lässt sich die Summation durchführen und es folgt:

$$K_{1,1}^{(120)} = 3332986.02$$

Zur Bestimmung der gesamten Elementsteifigkeitsmatrix wird mit den anderen Einträgen in selber Weise verfahren.

Konsistente Knotenlasten

Um den Element-Lastvektor aus Gleichung

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} \tilde{\mathbf{U}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(e)}$$

zu bestimmen, müssen nach der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix noch für jedes Element, an dem äußere Lasten oder Eigenspannungen anliegen, die konsistenten Knotenlasten berechnet werden. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die berechneten Knotenlasten die selbe virtuelle Arbeit leisten wie die anliegenden Eigenspannungen, Oberflächen- oder Volumenkraftdichten:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_V^{(e)T} \delta \tilde{\mathbf{U}}^{(e)} &= \int_{Vol^{(e)}} \tilde{\mathbf{q}}_V^T \delta \tilde{\mathbf{u}} \, dVol \\ \tilde{\mathbf{F}}_O^{(e)T} \delta \tilde{\mathbf{U}}^{(e)} &= \int_{O^{(e)}} \tilde{\mathbf{q}}_O^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_O \, dO \\ \tilde{\mathbf{F}}_E^{(e)T} \delta \tilde{\mathbf{U}}^{(e)} &= \int_{Vol^{(e)}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_E^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dVol \end{aligned}$$

Auf die Berechnung soll hier nicht weiter eingegangen werden, da das Vorgehen genauer in der vorlesungsbegleitenden Übung behandelt wird.