Beispiele mit Lösungen
Ein- und Mehrphasenströmungen

Stand: 3. März 2011

Inhaltsverzeichnis

1 RohrKanal **2**

2 Film **5**

3 Kugel **8**

4 Zweiphasen **17**

1 RohrKanal

Beispiel `bandstahl2`

Ein 2 mm dickes und 4 m breites Stahlband wird zweifach beschichtet. Auf dem Band befindet sich eine $\delta_1 = 0{,}3$ mm dicke Schicht eines Bingham Fluids. Es wird durch einen $l = 10$ cm langen Spalt gezogen. Im Spalt wird bis zur Gesamtdicke $\delta = 0{,}5$ mm eine zweite Schicht eines Newtonschen Fluides aufgebracht. Mit welcher Kraft muss gezogen werden, damit sich das Band mit $u_\mathrm{w} = 4$ m/s bewegt? Die Druckdifferenz entlang des Spaltes sei vernachlässigbar. Die Wirkung der Schwerkraft kann ebenfalls vernachlässigt werden.

a) Skizzieren Sie die Schubspannungsverteilung in beiden Spalten.

b) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung in beiden Spalten.

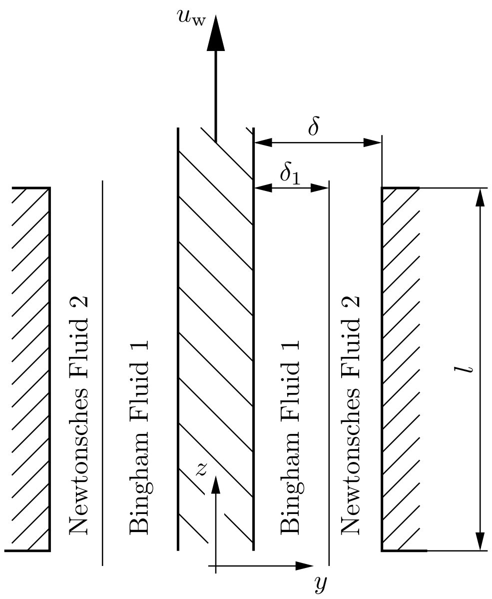
c) Berechnen Sie die Kraft, mit der das Band gezogen werden muss.

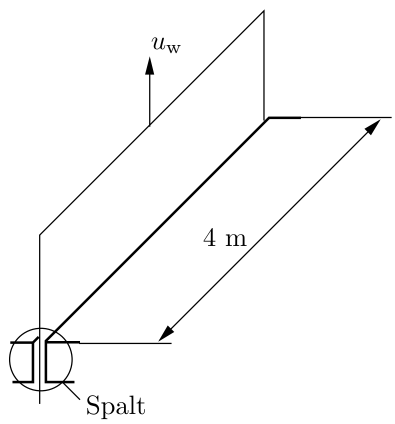
d) Welche Menge an Newtonschem Fluid wird pro Stunde verbraucht?

e) Begründen Sie, weshalb die Schwerkraft vernachlässigt werden kann.

Angaben: $\delta_1 = 0{,}3$ mm, $\delta = 0{,}5$ mm, $l = 10$ cm, $u_\mathrm{w} = 4$ m/s; $g = 9{,}81$ m/s^2.
Bingham Fluid 1: $\tau_0 = 8$ N/m^2, $\mu_\mathrm{B} = 1{,}2$ Pa s, $\rho_1 = 1120$ kg/m^3.
Newtonsches Fluid 2: $\mu_2 = 0{,}15$ Pa s, $\rho_2 = 800$ kg/m^3.

Für die Beantwortung der Fragen werden womöglich nicht alle Angaben benötigt.



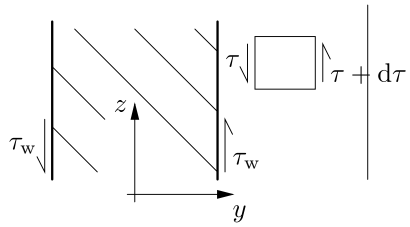


Lösung

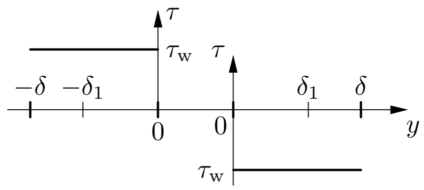
Rechengang:
– Schubspannung $\tau =$ const, Schubspannungsansätze einsetzen
– integrieren $\Rightarrow$ Geschwindigkeitsverteilung
– Randbedingungen, ergibt bisher unbekanntes τ_w
– Geschwindigkeitsverteilung für Fluid 2 integrieren $\Rightarrow$ Volumenstrom

a)

positive Richtung der Schubspannungen:

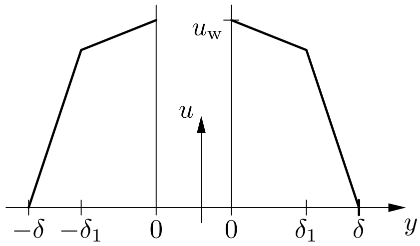


Schubspannungsverteilung:



b)

Die Geschwindigkeitsverteilung lässt sich auch schon skizzieren. Das Bingham-Fluid bewegt sich, falls $|\tau| \leq \tau_0$, wie ein Festkörper mit dem Band mit, oder es fließt wie ein Newtonsches Fluid. Bei einem 0,5 mm breite Spalt und einer Geschwindigkeit von 4 m/s müsste das Newtonsche Fluid von sehr geringer Viskosität sein, damit die Schubspannung in der Strömung geringer als die Grenzschubspannung τ_0 des Binghamschen Fluides bleibt. Falls $|\tau| > \tau_0$, was im Nachhinein zu überprüfen ist, fliessen beide Fluide.



c)

Schubspannungsverteilung in einer Couette-Stromung: $\tau = \mathrm{const} = \tau_\mathrm{w}$. Im Spalt auf der rechten Seite ist $\tau < 0$, im Spalt links $\tau > 0$, falls die Richtungen des angegebenen Koordinatensystems beibehalten werden. Die Rechnung wäre einfacher, falls der Ursprung an die Wand rechts gesetzt wird und y nach links in das Fluid weist. Wir fahren mit den angegebene Richtungen fort.

Schubspannungsansätze:

$$\tau_\mathrm{w} = -\tau_0 + \mu_\mathrm{B}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y}, \qquad \tau_w = \mu_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}y}.$$

Integrieren, $\int \mathrm{d}y$:

$$u_1 = \frac{\tau_\mathrm{w} + \tau_0}{\mu_\mathrm{B}}y + c_1, \qquad u_2 = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}y + c_2.$$

Randbedingungen:

$$u_1(y=0) = u_\mathrm{w} \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_\mathrm{w},$$

$$u_2(y=\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\delta,$$

sowie Kontinuitätsbedingung an der Grenzfläche zwischen den Fluiden,

$$u_1(y=\delta_1) = u_2(y=\delta_1) \quad \Rightarrow \quad \tau_\mathrm{w}\mu_\mathrm{B}\delta_1 + \frac{\tau_0}{\mu_\mathrm{B}}\delta_1 + u_\mathrm{w} = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\delta_1 - \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\delta,$$

$$\tau_\mathrm{w}\left(\frac{\delta_1}{\mu_\mathrm{B}} + \frac{\delta - \delta_1}{\mu_2}\right) = -u_\mathrm{w} - \frac{\tau_0}{\mu_\mathrm{B}}\delta_1, \quad \tau_\mathrm{w} = \frac{-4 - 8\cdot 0{,}3\cdot 10^{-3}/1{,}2}{(0{,}3/1{,}2 + 0{,}2/0{,}15)\cdot 10^{-3}} = -2528\ \mathrm{N/m^2}.$$

Es gilt $\tau_\mathrm{w} > \tau_0$, die in b) skizzierte Schubspannungsverteilung stimmt.

Kraft, mit $B = 4$ m:

$$|F_\mathrm{W}| = 2|\tau_\mathrm{w}|lB = 2\cdot 2528\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4 = 2022\ \mathrm{N}.$$

d)

Der längenbezogene Volumenstrom auf einer Seite (deshalb $\dot V_2/\underline{2}B$) ist

$$\dot V_2/(2B) = \int\limits_{\delta_1}^{\delta} u_2\,\mathrm{d}y = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\int\limits_{\delta_1}^{\delta} y - \delta\,\mathrm{d}y = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\left[\frac{y^2}{2} - \delta y\right]_{\delta_1}^{\delta} = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\left[-\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta_1}{2} + \delta\delta_1\right] = -\frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2}\frac{1}{2}(\delta - \delta_1)^2$$

$$\dot V_2 = 2\cdot 4\cdot\frac{2528}{0{,}15\cdot 2}(0{,}2^2\cdot 10^{-6} = 2{,}697\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}.$$

Vom Fluid 2 werden $\dot{V}_2 = 9{,}7\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ verbraucht.
e)
Im Vergleich zu $F_\mathrm{W} = 2022$ N ist die auf das Fluid im Spalt wirkende Schwerkraft klein. Nachrechnen wäre nicht nötig, ergibt aber $F_\mathrm{G} = \rho\delta 2lB = 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}8 = 0{,}4$ N.

2 Film

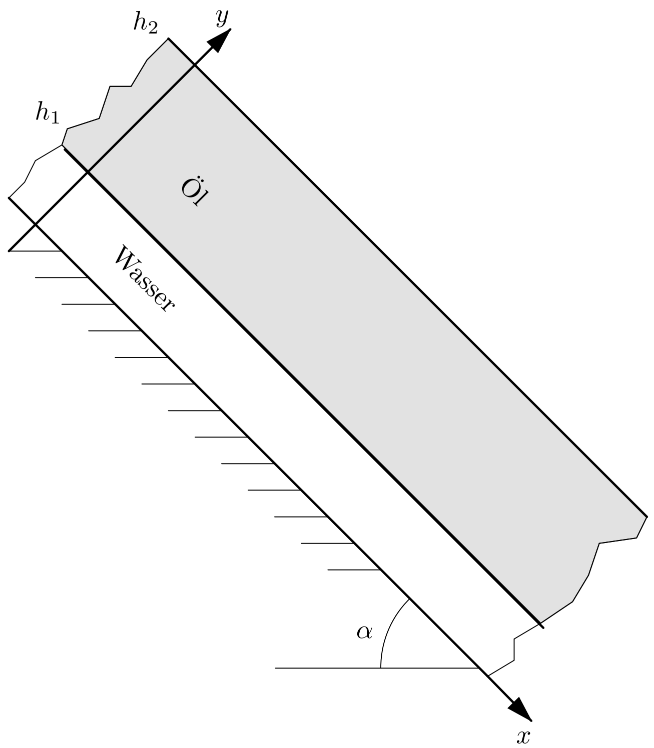
Beispiel `SchiefDoppelFilm`

An einer schiefen Ebene, die um den Winkel $\alpha = 40°$ gegen die Horizontale geneigt ist, fließen Öl und Wasser in zwei parallelen Schichten ab. Die Schichtdicke des Wasserfilms betrage 0,4 mm, die des Ölfilms 0,8 mm. Stoffwerte: Wasser (Index 1): $\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu_1 = 10^{-3}$ Pas; Öl: $\rho_2 = 890\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu_2 = 0{,}1$ Pas; Schwerebeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m^2/s}$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Grenzfläche und der Oberfläche des Öls.

b) Geben Sie für den Wasserfilm und für den Ölfilm eine charakteristische Reynoldszahl an.

c) Skizzieren Sie die Schubspannungs- und die Geschwindigkeitsverteilung.



Lösung

Rechengang:

- Kräftegleichgewicht $\Rightarrow \tau(y)$
- Schubspannungsansatz
- Integration $\Rightarrow u(r)$
- Integration $\Rightarrow \dot{V}^{(\mathrm{L})} \Rightarrow u_m$

Kräftegleichgewicht ($\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = 0$):

$$0 < y < h_1 :$$

$$g \sin\alpha(\rho_2(h_2 - h_1) + \rho_1(h_1 - y)) - \tau = 0$$
$$\tau = g \sin\alpha(\rho_2(h_2 - h_1) + \rho_1(h_1 - y))$$

$$h_1 < y < h_2 :$$

$$\tau = g \sin\alpha \rho_2 (h_2 - y)$$

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \quad \text{Newtonsches Fluid}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\tau}{\mu}\mathrm{d}y$$

$$0 < y < h_1 :$$

$$u(y = 0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = g \sin\alpha \frac{1}{\mu_1}(\rho_2(h_2 - h_1) + \rho_1(h_1 - y))$$

$$u(y) = \frac{g \sin\alpha}{\mu_1}\left(\rho_2(h_2 - h_1)y + \rho_1(h_1 y - \frac{y^2}{2})\right)$$

$$u(h_1) = \frac{g \sin\alpha}{\mu_1}\left(\rho_2(h_2 - h_1) + \rho_1 \frac{h_1}{2}\right) h_1$$

$$u(h_1) = \frac{9{,}81 \cdot \sin(40)}{10^{-3}}\left(980 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\right) \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_{m1} = \frac{\dot{V}_1^{\mathrm{L}}}{h_1}$$

$$\dot{V}_1^{\mathrm{L}} = \int_0^{h_1} u\mathrm{d}y = \frac{g \sin\alpha}{\mu_1}\left(\rho_2(h_2 - h_1)\frac{y^2}{2} + \rho_1 h_1 \frac{y^2}{2} - \rho_1 \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^{h_1}$$

$$\dot{V}_1^{\mathrm{L}} = \frac{g \sin\alpha}{2\mu_1}{h_1}^2\left(\rho_2(h_2 - h_1) + \rho_1 h_1 \frac{2}{3}\right)$$

$$u_{m1} = \frac{\dot{V}_1^{\mathrm{L}}}{h_1} = \frac{9{,}81 \cdot \sin(40) \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}\left(890 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot \frac{0{,}8}{3} \cdot 10^{-3}\right) = 1{,}234\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{u_{m1} h_1 \rho_1}{\mu_1} = 1{,}234 \cdot \frac{0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 1000}{10^{-3}} = 492$$

$$h_1 < y < h_2 :$$

$$u_2 = \frac{1}{\mu_2}\int g \sin\alpha \rho_2 (h_2 - y)\mathrm{d}y = \frac{g \sin\alpha \rho_2}{\mu_2}(h_2 - \frac{y}{2})y + C_2$$

Randbedingung:

$$u_2(y = h_1) = u_1(y = h_2) = 2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_2(y = h_2) = \frac{g \sin\alpha \rho_2}{\mu_2}\left(h_2 - \frac{h_1}{2}\right) h_2 + C_2 = 2{,}3$$

$$C_2 = 2{,}3 - \frac{9{,}81 \cdot \sin(40) \cdot 890}{0{,}1}(1{,}2 - 0{,}2) \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}4 = 2{,}28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_2(y = h_2) = \frac{g \sin(40)\rho_2}{\mu_2}\frac{{h_2}^2}{2} + C_2 = 0{,}04 + 2{,}28 = 2{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_{m2} = \frac{\dot{V}_2^{\mathrm{L}}}{h_2 - h_1}$$

$$\dot{V}_2^{\mathrm{L}} = \int_{h_1}^{h_2} u \mathrm{d}y$$

$$u_{m2} = 2{,}31\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{u_{m2}(h_2 - h_1)\rho_2}{\mu_2} = 2{,}31 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 890 \cdot \frac{1}{0{,}01} = 16{,}4$$

3 Kugel

Beispiel `Handball1`

Ein Handball der Größe III, Gewicht 425 g, Umfang 60 cm, wird über eine Strecke von 7 m geschossen. Am Beginn der Strecke habe der Ball eine Geschwindigkeit von 90 km/h. Vernachlässigen Sie die Wirkung der Schwerkraft und nehmen Sie an, der Ball bewege sich horizontal und in gerader Linie.

Stoffwerte von Luft: $\rho = 1{,}188\ \mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 18{,}24 \cdot 10^{-6}$ Pas.

a) Welche Reynoldszahl hat der Ball bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h? Wie groß ist der Widerstandsbeiwert?

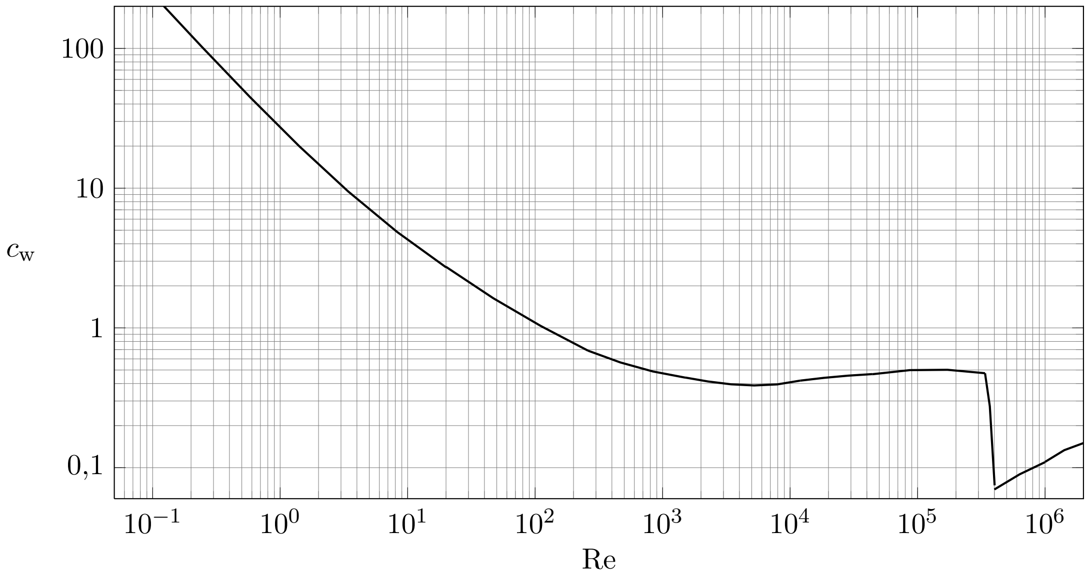
b) In welcher Zeit würde der Ball die gegebene Strecke zurücklegen, falls die Geschwindigkeit konstant und gleich der Anfangsgeschwindigkeit bliebe?

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Ball auf! Lösen Sie die Bewegungsgleichung und geben Sie die Funktion für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, $U(t)$, an.

d) Wie lange braucht der Ball, um die Strecke von 7 m zurückzulegen?

e) Welche Geschwindigkeit hat der Ball am Ende der Strecke?

Hinweis: Die Differentialgleichung für die Bewegung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen.



Widerstandsbeiwert für Kugeln mit glatter Oberfläche. (Nach Clift, Grace und Weber (1978), S. 112.)

Lösung

a) $U = 90 \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{m/s}$, $d = \frac{60\ \mathrm{cm}}{\pi} = 19{,}1$ cm.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{1{,}188 \cdot 25 \cdot 0{,}191}{1{,}824 \cdot 10^{-5}} = 3{,}1 \cdot 10^5.$$

Für eine glatte Kugel wäre $c_\mathrm{w} = 0{,}5$. Ein Handball hat eine nicht ganz glatte Oberfläche, deshalb ist die Grenzschicht bei dieser Re-Zahl wahrscheinlich schon umgeschlagen und der Widerstandsbeiwert ist dementsprechend kleiner, $c_\mathrm{w} = 0{,}1$. Wir verwenden hier $c_\mathrm{w} = 0{,}1$.

b)

$$t = \frac{s}{U} = \frac{7}{25} = 0{,}28\ \mathrm{s}.$$

c) $\vec{F}_\mathrm{W} \longleftarrow \bigcirc \longrightarrow \vec{U}$

$$m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -F_\mathrm{W} = -c_\mathrm{w}\tfrac{1}{2}\rho U^2\frac{d^2\pi}{4}$$

Separation,

$$U^{-2}\mathrm{d}U = -\underbrace{\frac{c_\mathrm{w}\rho d^2\pi}{8m}}_{a}\mathrm{d}t, \qquad U^{-2}\mathrm{d}U = -a\mathrm{d}t$$

Mit $c_\mathrm{w} = 0{,}1$ ist $a = \dfrac{0{,}1 \cdot 1{,}188 \cdot 0.191^2\pi}{8 \cdot 0{,}425} = 4 \cdot 10^{-3}$. (Für $c_\mathrm{w} = 0{,}5$ wäre $a = 0{,}02$.)
Unbestimmte Integration,

$$-\frac{1}{U} = -at + c_1,$$

RB: $U(t=0) = U_1$, daher ist $c_1 = -1/U_1$. Die Lösung lautet

$$U(t) = \left(\frac{1}{U_1} + at\right)^{-1}$$

Oder bestimmte Integration zwischen dem Zustand am Beginn der Strecke, $(U_1,\ t_1 = 0)$, und einem Zustand auf der Strecke, $(U,\ t)$,

$$\left[-\frac{1}{U_1}\right]_1^2 = \Big[-at\Big]_1^2, \qquad -\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U_1}\right) = -a(t - t_1).$$

---

d)

$$s = \int_1^2 U\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_2}\frac{1}{\frac{1}{U_1} + at}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}\ln\left(\tfrac{1}{U_1} + at\right)\right]_0^{t_2} = \frac{1}{a}\left(\ln\left(\tfrac{1}{U_1} + at_2\right) - \ln\left(\tfrac{1}{U_1}\right)\right),$$

$$e^{as} = \frac{1/U_1 + at_2}{1/U_1} = 1 + aU_1t_2, \qquad t_2 = \frac{e^{as} - 1}{aU_1} = \frac{e^{4\cdot 10^{-3}\cdot 7} - 1}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 25} = 0{,}284\ \mathrm{s}.$$

e)

$$U_2 = \left(1/25 + 0{,}284 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\right)^{-1} = 24{,}31\ \mathrm{m/s}.$$

Mit $c_\mathrm{w} = 0{,}5$ wäre $t_2 = 0{,}3$ s und $U_2 = 21{,}74$ m/s $= 78{,}26$ km/h.

Beispiel PMMA1

Wie groß darf der Durchmesser einer PMMA-Kugel (Polymethylmethacrylat, Acrylglas; $\rho_V = 1{,}18\ \mathrm{g/cm^3}$) maximal sein, damit diese in Silikonöl mit einer Reynoldszahl kleiner oder gleich eins fällt?
Silikonöl: $\rho = 940\ \mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa s. Schwerebeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Lösung

Für eine Abschätzung ist bei $\mathrm{Re} = 1$ das Stokessche Widerstandsgesetz, $F_\mathrm{W} = 6\pi\mu U R$, gut genug. (Beziehungsweise ist der Widerstandsbeiwert aus dem graphisch gegebenen Widerstandsgesetz, $c_\mathrm{w} = c_\mathrm{w}(\mathrm{Re})$, bis $\mathrm{Re} \approx 1$ kaum genauer ablesbar.) Das Kräftegleichgewicht, $F_\mathrm{W} = F_\mathrm{G} - F_h$, lautet somit

$$6\pi\mu U R = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_V - \rho)g. \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit wird über die Definition der Reynoldszahl eliminiert, $\mathrm{Re} = \rho U 2R/\mu$. Mit $\mathrm{Re} = 1$ folgt

$$U = \mu/(\rho 2R). \tag{2}$$

Eliminieren von U aus Gl. (1) mittels Gl. (2) liefert

$$\frac{3\mu^2}{\rho} = \frac{4R^3}{3}(\rho_V - \rho)g$$

und weiter

$$R^3 = \frac{9}{4}\frac{\mu^2}{\rho(\rho_V - \rho)g}.$$

$$R = \left(\frac{9}{4}\frac{4 \cdot 10^{-4}}{940 \cdot 240 \cdot 9{,}81}\right)^{1/3} = 0{,}74 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m};\quad d = 1{,}5\ \mathrm{mm}.$$

Eine PMMA-Kugel sinkt mit einer Reynoldszahl kleiner als eins, falls sie einen Durchmesser kleiner als 1,5 mm hat.
Geschwindigkeit:

$$U = \frac{\mathrm{Re}\mu}{\rho d} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{940 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}4\ \mathrm{cm/s}.$$

Beispiel `PMMA2`

Eine PMMA-Kugel ($\rho_V = 1{,}18$ g/cm^3) mit dem Durchmesser $d = 1$ mm werde in Silikonöl ($\rho = 940$ kg/m^3, $\mu = 2 \cdot 10^{-2}$ Pa s; $g = 9{,}81$ m/s^2) fallen gelassen.

(a) Wie hoch ist die Fallgeschwindigkeit der Kugel?

(b) In welcher Zeit beschleunigt die Kugel aus der Ruhe auf 99% ihrer Endgeschwindigkeit?

(c) Welchen Weg legt die Kugel dabei zurück?

Lösung

Antwort zu (a):
Aufgrund der geringen Dichtedifferenz zwischen Kugel und Flüssigkeit und der hohen Viskosität der Flüssigkeit nehmen wir vorest an, dass die Kugel mit einer Reynoldszahl kleiner als eins fällt. Der Widerstand ist deshalb durch das Stokessche Widerstandsgesetz gegeben, $F_\mathrm{W} = 6\pi\mu U R$, somit ergibt das Kräftegleichgewicht, $F_\mathrm{W} = F_\mathrm{G} - F_h$,

$$6\pi\mu U R = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_V - \rho)g.$$

Nach Umformung folgt

$$U = \frac{2R^2}{9\mu}(\rho_V - \rho)g = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}(240)9{,}81 = 65{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

$$U = 6{,}54 \text{ mm/s}.$$

Die Fallgeschwindigkeit der Kugel beträgt 6,54 mm/s.
Kontrolle Re < 1, Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{940 \cdot 6{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}3.$$

(b):
Das 2. Newtonsche Gesetz, $ma = \sum F$, ergibt hier mit der added mass m'

$$(m + m')\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = F_\mathrm{G} - F_h - F_\mathrm{W},$$

$$\frac{4R^3\pi}{3}(\rho_V + \tfrac{1}{2}\rho)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_V - \rho)g - 6\pi\mu U R.$$

Nach Umformung, der Term mit U kommt auf die linke Seite, $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ bleibt ohne Koeffizienten stehen, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{9\mu}{2R^2(\rho_V + \rho/2)}U = \frac{\rho_V - \rho}{\rho_V + \rho/2}g.$$

Man bemerkt nebenbei: Dividiert man die rechte Seite durch den Koeffizienten vor U, erhält man die Sinkgeschwindigkeit, $\dfrac{2R^2(\rho_V + \rho/2)}{9\mu}\dfrac{\rho_V - \rho}{\rho_V + \rho/2}g$.
Mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{t_\mathrm{c}} = \frac{9\mu}{2R^2(\rho_V + \rho/2)}, \quad t_\mathrm{c} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}(1180 + 470)}{9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 4{,}58 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

und

$$a_1 = \frac{\rho_V - \rho}{\rho_V + \rho/2} = \frac{240}{1650} = 0{,}145$$

wird obige Differentialgleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t_\mathrm{c}} U = a_1 g.$$

Die homogene Lösung lautet $U_\mathrm{hom} = c_1 e^{-t/t_\mathrm{c}}$.
Die partikuläre Lösung ist die Sinkgeschwindigkeit, $U_\mathrm{part} = U_\infty = a_1 g t_\mathrm{c} = 6{,}54 \cdot 10^{-3}$ m/s. Der Wert 6,54 wurde von oben übernommen. Zur Kontrolle: $a_1 g t_\mathrm{c} = 0{,}145 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}58 \cdot 10^{-3} = 6{,}51 \cdot 10^{-3}$ m/s. In der letzten Stelle machen sich Rundungsfehler bemerkbar.
Zurück zur Differentialgleichung, die allgemeine Lösung lautet

$$U(t) = c_1 e^{-t/t_\mathrm{c}} + U_\infty.$$

Gesucht ist die Lösung des Problems mit der Randbedingung $U(t = 0) = 0$,

$$0 = c_1 + U_\infty \quad \Rightarrow \quad c_1 = -U_\infty.$$

Damit ist die Geschwindigkeit

$$U(t) = U_\infty \left(1 - e^{-t/t_\mathrm{c}}\right).$$

In (b) wird nach der Zeit t_{99} gefragt, zu der gilt $U(t = t_{99}) = 0{,}99 U_\infty$, also

$$U_\infty \left(1 - e^{-t_{99}/t_\mathrm{c}}\right) = 0{,}99 U_\infty,$$

$$e^{-t_{99}/t_\mathrm{c}} = 1/100, \quad -t_{99}/t_\mathrm{c} = \ln(1/100), \quad t_{99} = t_\mathrm{c} \ln(100) = 4{,}605 \cdot 4{,}58 \cdot 10^{-3} = 2{,}11 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

Die Kugel erreicht in 2 hundertstel Sekunden 99% ihrer Endgeschwindigkeit.

(c):
Um den zurückgelegten Weg zu ermitteln, muss die Geschwindigkeit nach der Zeit integriert werden,

$$s(t_{99}) = \int_0^{t_{99}} U(t)\mathrm{d}t = U_\infty \left[t + t_\mathrm{c} e^{-t/t_\mathrm{c}}\right]_0^{t_{99}} = U_\infty (t_{99} + t_\mathrm{c} e^{-t_{99}/t_\mathrm{c}} - t_\mathrm{c}).$$

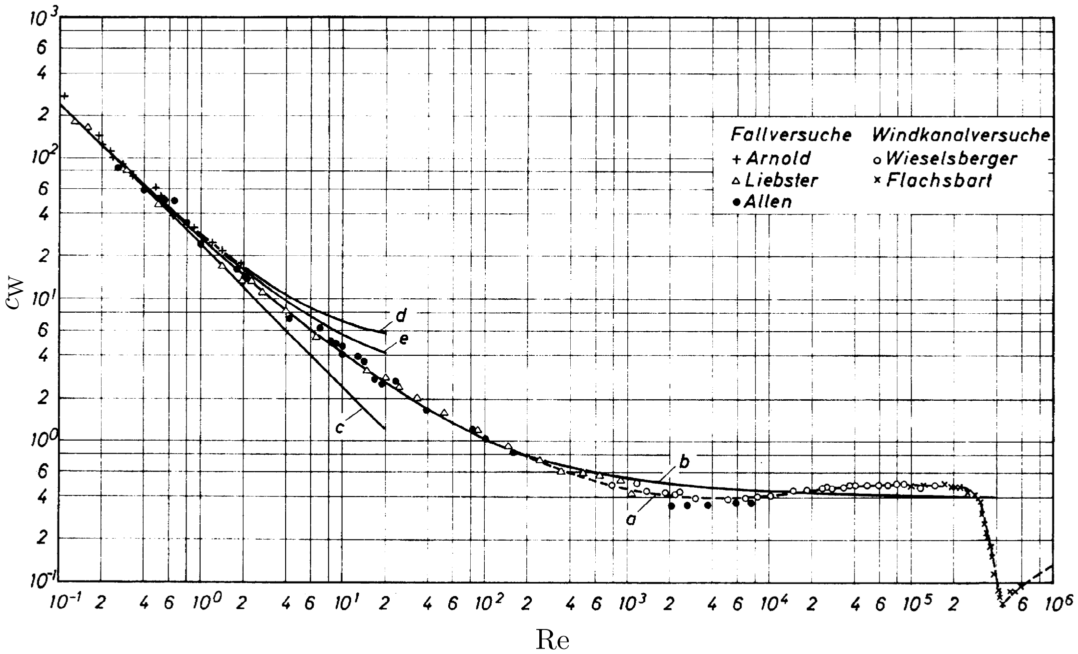
Oben hatten wir ausgerechnet $t_{99} = 4{,}605 t_\mathrm{c}$, $e^{-t_{99}/t_\mathrm{c}} = 1/100$,

$$s(t_{99}) = U_\infty (4{,}604 - 0{,}99) t_\mathrm{c} = U_\infty 3{,}615 t_\mathrm{c} = 6{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}615 \cdot 4{,}58 \cdot 10^{-3} = 1{,}08 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

Die Kugel legt 0,1 mm zurück, bis sie auf 99% ihrer Endgeschwindigkeit beschleunigt hat.

Beispiel PMMA3

Mit welcher Geschwindigkeit sinkt eine PMMA-Kugel ($\rho_V = 1{,}18$ g/cm^3) mit einem Durchmesser von $d = 1$ mm in Wasser ($\rho = 1000$ kg/m^3, $\mu = 10^{-3}$ Pa s) zu Boden? Schwerebeschleunigung $g = 9{,}81$ m/s^2.



Widerstandsbeiwert für Kugeln mit glatter Oberfläche. Kurve c – Stokessches Gesetz, d – Oseensche Näherung. (Abb. 5.2 aus Brauer, 1971).

Lösung

Bezüglich der Re-Zahl wird vorerst keine Annahme getroffen. Der Widerstand der Kugel wird ganz allgemein mittels des c_w-Wertes geschrieben, $F_\mathrm{W} = c_\mathrm{w}\frac{1}{2}\rho U^2 R^2 \pi$. Das Kräftegleichgewicht, $F_\mathrm{W} = F_\mathrm{G} - F_h$ ergibt

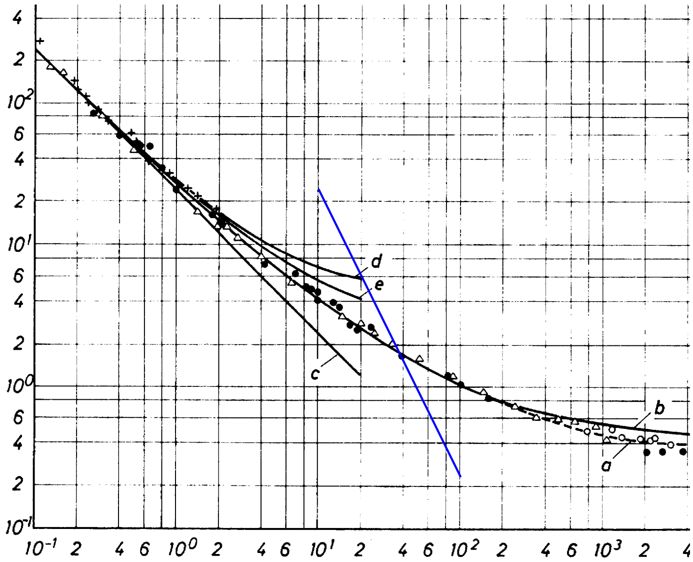
$$c_\mathrm{w}\frac{1}{2}\rho U^2 R^2 \pi = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_V - \rho)g; \quad c_\mathrm{w} = \frac{8Rg}{3\rho U^2}(\rho_V - \rho).$$

Die Geschwindigkeit U wird durch Re eliminiert, $U = \mu \mathrm{Re}/(\rho 2R)$,

$$c_\mathrm{w} = \frac{8Rg\rho^2 4R^2}{3\rho\mu^2\mathrm{Re}^2} = \frac{32\rho g R^3}{3\mu^2\mathrm{Re}^2}(\rho_V - \rho) = \frac{4\rho g d^3}{3\mu^2\mathrm{Re}^2}(\rho_V - \rho).$$

$$c_\mathrm{w} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-9} \cdot 180}{3 \cdot 10^{-6}\mathrm{Re}^2} = \frac{2350}{\mathrm{Re}^2}.$$

Bei Re $= 10$ ist $c_\mathrm{w} = 23{,}5$, bei Re $= 100$ ist $c_\mathrm{w} \approx 0{,}24$. Diese beiden Punkte werden in das c_w-Re Diagramm eingetragen und durch eine Gerade verbunden. Diese Gerade entspricht dem Kräftegleichgewicht für die gegebene Kugel.



Beim Schnittpunkt der Gerade mit der Kurve für den Widerstandsbeiwert liest man ab

$$c_{\mathrm{w}} \approx 1{,}8, \quad \mathrm{Re} \approx 39.$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Definition der Re-Zahl, $U = \mu \mathrm{Re}/(\rho d)$,

$$U = \frac{10^{-3} \cdot 39}{10^3 10^{-3}} = 3{,}9 \text{ cm/s}.$$

Die Kugel fällt mit einer Geschwindigkeit von 3,9 cm/s.

Zur Kontrolle wird $c_{\mathrm{w}} = 1{,}8$ in das Kräftegleichgewicht eingesetzt und die Geschwindigkeit berechnet,

$$U^2 = \frac{8Rg}{3\rho c_{\mathrm{w}}}(\rho_v - \rho), \quad U = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 180}{3 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8}} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Beispiel Tischtennis4

Nehmen Sie an, ein Tischtennisball ($d = 40$ mm, $m = 2{,}7$ g) bewege sich in gerader Linie, ohne zu rotieren, horizontal über einen Tischtennistisch ($l = 2{,}74$ m) durch Luft von 20 °C. (Horizontale Bewegung: Die Schwerkraft wird vernachlässigt.) Zu Beginn, über der ersten Kante des Tisches, habe der Ball eine Geschwindigkeit von 80 km/h. Welche Geschwindigkeit hat der Ball am Ende, über der zweiten Kante des Tisches?

a) Wie hoch ist die Reynoldszahl des Tischtennisballes zu Beginn?

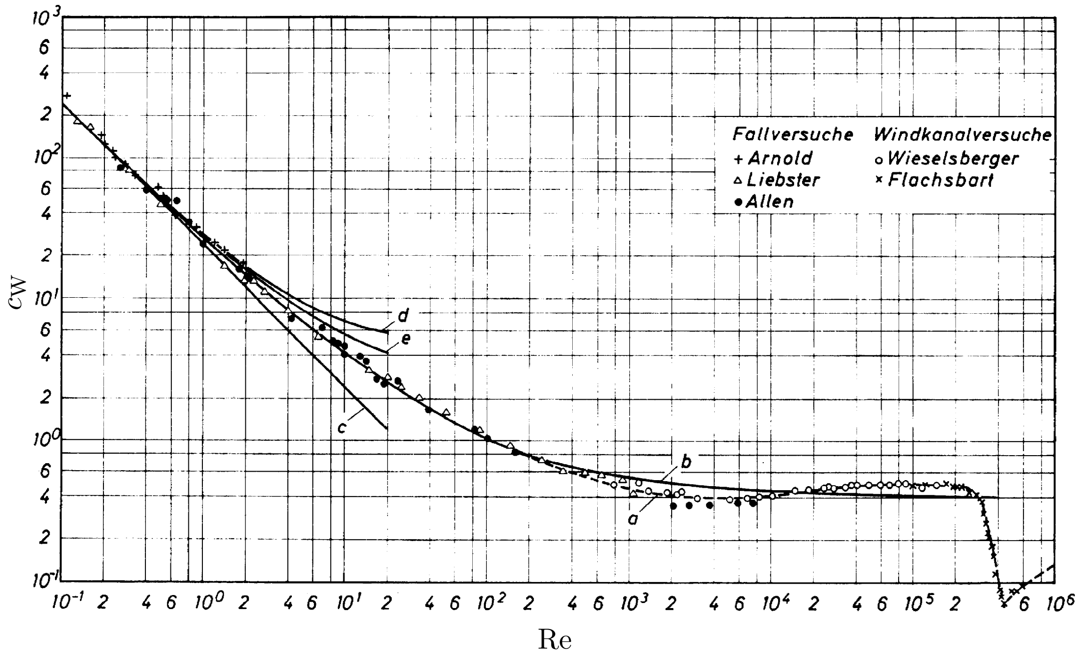
b) Berechnen Sie die Widerstandskraft, die zu Beginn auf den Ball wirkt.

c) Wie lange braucht der Ball, um die Platte zu überqueren?

d) Welche Geschwindigkeit hat der Ball am Ende der Platte?

Stoffwerte von Luft bei 20 °C und $p = 1$ bar (VDI-Wärmeatlas): $\rho = 1{,}188$ kg/m^3, $\mu = 18{,}24 \cdot 10^{-6}$ Pas.

Hinweis: Die entstehende Differentialgleichung lässt sich durch die Methode der Trennung der Variablen lösen.



Widerstandsbeiwert für Kugeln mit glatter Oberfläche. Kurve c – Stokessches Gesetz, d – Oseensche Näherung. (Abb. 5.2 aus Brauer, 1971).

Lösung

a)

$U = 80$ km/h $= \dfrac{80}{3{,}6}$ m/s $= 22{,}22$ m/s.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{1{,}188 \cdot 22{,}22 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{1{,}824 \cdot 10^{-5}} = 5{,}789 \cdot 10^4.$$

b)

Mit $\mathrm{Re} = 5{,}7 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad c_\mathrm{w} \approx 0{,}5.$

$$F_\mathrm{W} = c_\mathrm{w} \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{d^2 \pi}{4} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}188 \cdot 22{,}22^2 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4} \pi/4 = 0{,}184 \text{ N}.$$

c)
2. Newtonsches Gesetz, $ma = \sum F$, hier: $m\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = -F_\mathrm{W}$. Minus, weil die Widerstandskraft gegen die Bewegungsrichtung des Balles wirkt! Einsetzen von F_W ergibt

$$m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -c_\mathrm{w}\frac{1}{2}\rho U^2\frac{d^2\pi}{4},$$

Separation:

$$\frac{1}{U^2}\mathrm{d}U = -\underbrace{\frac{c_\mathrm{w}\rho d^2\pi}{8m}}_{k}\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{U^2}\mathrm{d}U = -k\mathrm{d}t.$$

Die Abkürzung k, der Kehrwert einer charakteristischen Weglänge, hat den Wert
$k = \dfrac{c_\mathrm{w}\rho d^2\pi}{8m} = \dfrac{0{,}5\cdot 1{,}188\cdot 4^2\cdot 10^{-4}\pi}{8\cdot 2{,}7\cdot 10^{-3}} = 0{,}138\ \mathrm{m}^{-1}$. Unbestimmte Integration ergibt

$$-\frac{1}{U} = -kt + c_1. \qquad \text{RB: } U(t=0) = U_0 = 22{,}22\ \mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{U_0}.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$U = (kt + 1/U_0)^{-1}\,.$$

Der zurückgelegte Weg ist das Integral der Geschwindigkeit nach der Zeit,

$$s = \int U\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{kt+1/U_0}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\,(kt + 1/U_0) + c_2.$$

Mit der Randbedingung $s(t=0) = 0$ ist $c_2 = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{U_0}\right) = \dfrac{1}{k}\ln U_0$.
Allgemeine Lösung:

$$s = \frac{1}{k}\ln(U_0kt + 1)$$

Umformen und für den Weg s die Länge l der Tischplatte einsetzen ergibt die Zeit, die der Tischtennisball zum Überqueren benötigt,

$$e^{ks} = U_0kt + 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{e^{ks}-1}{U_0k} = \frac{e^{0{,}138\cdot 2{,}74}-1}{22{,}22\cdot 0{,}138} = 0{,}1499 = 0{,}15\ \mathrm{s}. \qquad (c_\mathrm{w} = 0{,}4\text{: } t = 0{,}144\ \mathrm{s.})$$

d)
Geschwindigkeit: Endzeit in die Lösung für die Geschwindigkeit einsetzen,

$$U = (0{,}138\cdot 0{,}15 + 1/22{,}22)^{-1} = 15{,}21\ \mathrm{m/s}. \qquad (c_\mathrm{w} = 0{,}4\text{: } U = 16{,}44\ \mathrm{m/s.})$$

4 Zweiphasen

Beispiel `Kesselx5`

In einem Kessel befindet sich ein homogenes Gemisch aus flüssigem Wasser und gasförmiger Luft, welche als ideales Gas zu behandeln ist. Dieses Gemisch strömt durch eine Düse in Form einer homogenen, isothermen, reibungsfreien und stationären Zweiphasenströmung ins Freie. Der Massenanteil der gasförmigen Phase ist $x = 0{,}002$, der Außendruck beträgt $p = 1\,\mathrm{bar}$ und der konstante Druck im Kessel $p_0 = 1{,}09\,\mathrm{bar}$. Die Temperatur im Kessel und in der Umgebung beträgt $T = 290\,\mathrm{K}$.

$R_{\mathrm{Luft}} = 287{,}22\,\mathrm{J/kgK}$, $\rho_{\mathrm{Wasser}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

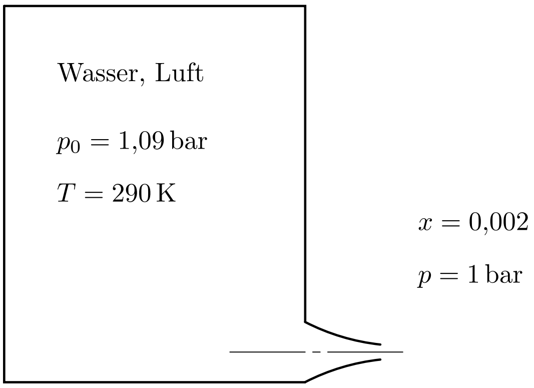
Berechnen Sie

a) den Volumenanteil der Luft α sowie die Dichte ρ des Gemisches am Ende der Düse,

b) den Volumenanteil der Luft α_0 im Kessel und

c) die Geschwindigkeit v und die Machzahl M am Ende der Düse.

d) Bei welchem Außendruck p^* wird am Ende der Düse Schallgeschwindigkeit erreicht?



Formelsammlung
verallgemeinerte Bernoulligleichung:

$$\rho_1 \frac{v^2}{2} + p + \rho_1 g(z - z_{\mathrm{r}}) = \rho_1 \frac{v_{\mathrm{r}}^2}{2} + p_{\mathrm{r}} \left[1 + \frac{\alpha_{\mathrm{r}}}{1-\alpha_{\mathrm{r}}} \ln\left(\frac{p_{\mathrm{r}}}{p}\right)\right]$$

kritisches Druckverhältnis:

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0}\frac{p^*}{p_0}\right)^2$$

Rohrströmung mit Reibung:

$$\frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{2d}(z - z_{\mathrm{r}}) = K\left(\frac{1}{M_{\mathrm{r}}} - \frac{1}{M}\right) + K^2 \ln\left(\frac{M_{\mathrm{r}}}{M}\right) + (1-K^2)\ln\left(\frac{1+KM_{\mathrm{r}}}{1+KM}\right), \quad K = \frac{\alpha}{(1-\alpha)M}$$

Lösung

a)
Fehlende Zustandsgrößen berechnen. Die Diche lässt sich aus $v = (1-x)v_1 + xv_2$ bestimmen.

$$v_2 = R_{\mathrm{Luft}}T/p = 287{,}22 \cdot 290/10^5 = 0{,}833\ \mathrm{m^3/kg}.$$

$$\rho = \left(\frac{1-x}{\rho_1} + xv_2\right)^{-1} = \left(\frac{0{,}998}{1000} + 0{,}002 \cdot 0{,}833\right)^{-1} = 375\ \mathrm{kg/m^3}.$$

$$x\rho = \alpha\rho_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = x\rho v_2 = 0{,}002 \cdot 375 \cdot 0{,}833 = 0{,}625.$$

Bzw. näherungsweise: $\rho \approx (1-\alpha)\rho_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\rho_1 - \rho)/\rho_1 = 0{,}625.$

b)

Der Rechengang für a) kann ebenso für den Zustand im Kessel verwendet werden, mit $p_0 = 1{,}09 \cdot 10^5$ Pa statt $p = 10^5$ Pa. Oder

$$\frac{p\alpha}{1-\alpha} = \frac{p_0\alpha_0}{1-\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \left(1 + \frac{p_0}{p}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{-1} = \left(1 + 1{,}09\frac{0{,}375}{0{,}625}\right)^{-1} = 0{,}605.$$

c)

Schallgeschwindigkeit am Ende der Düse:

$$c_{xT} = \sqrt{\frac{p}{\alpha\rho}} = \sqrt{\frac{10^5}{0{,}625 \cdot 375}} = 20{,}66 \text{ m/s}.$$

Die Geschwindigkeit erhält man aus der verallgemeinerten Bernoulligleichung, als Referenzzustand r wird der Kesselzustand gewählt, $v_\mathrm{r} = 0$, $p_\mathrm{r} = p_0$, $\alpha_\mathrm{r} = \alpha_0$.

$$\rho_1\frac{v^2}{2} + p = p_0\left[1 + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\ln\left(\frac{p_0}{p}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad v = \left\{\frac{2}{\rho_1}\left[p_0 - p + \frac{p_0\alpha_0}{1-\alpha_0}\ln\left(\frac{p_0}{p}\right)\right]\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{2}{1000} \cdot 1{,}09 \cdot 10^5 \left[1 - \frac{1}{1{,}09} + \frac{1}{1{,}09} \cdot \frac{0{,}625}{0{,}375}\ln(1{,}09)\right]\right\}^{1/2} = 6{,}84 \text{ m/s}.$$

d)

Das ist genau die Frage nach dem kritischen Druckverhältnis. Selbst die Bezeichnungen, p_0 und α_0, können unverändert aus dem Beispiel übernommen werden. Mit $(1-\alpha_0)/\alpha_0 = 0{,}65$ folgt

$$0{,}65(1 - p^*/p_0) - \ln(p^*/p_0) = \tfrac{1}{2}(1 + 0{,}65p^*/p_0)^2.$$

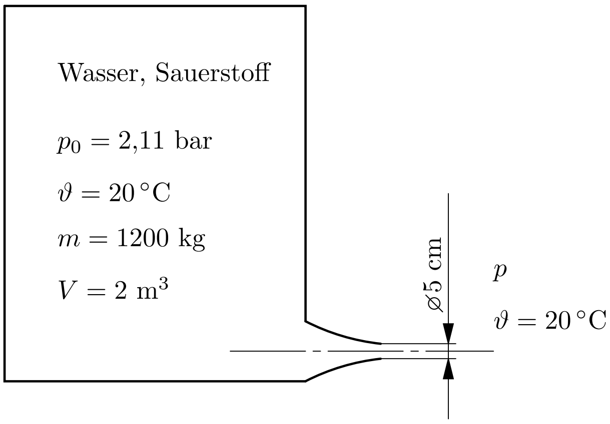
Die Gleichung muss iterativ gelöst werden. Die Lösung ist $p^*/p_0 = 0{,}5405$,
$p^* = 1{,}09 \cdot 0{,}5405 = 0{,}589$ bar.

Eine Variation zu d): Bei welchem Druck p_1 im Kessel wird am Ende der Düse die Schallgeschwindigkeit erreicht?

In diesem Fall kann nicht einfach in die Gleichung für das kritische Druckverhältnis eingesetzt werden, da α_0 und p_0 vorerst unbekannt sind. Es wird die verallgemeinerte Bernoulligleichung verwendet, mit $\alpha_\mathrm{r} = \alpha = 0{,}625$, $p_\mathrm{r} = p = 10^5$ Pa, $v_\mathrm{r} = c_{xT} = 20{,}66$ m/s, $v = 0$. Eine zweite Möglichkeit ist, in der Gleichung für das kritische Druckverhältnis $(1-\alpha_0)/\alpha_0$ durch $p_0(1-\alpha)/(p\alpha)$ zu ersetzen. Die Lösung ist $p_0 = 1{,}987$ bar.

Beispiel `Mundung_KritDruckverh`

In einem Kessel befindet sich ein homogenes Gemisch aus Wasser (Index 1: $\rho_1 = 998{,}2\,\mathrm{kg/m^3} = konst.$, $1-\alpha$, $1-x$) und Sauerstoff (Index 2: α, x), welcher als ideales Gas zu behandeln ist. Die Dichte des Sauerstoffs im Kesselzustand ist $\rho_{20} = 2{,}77\,\mathrm{kg/m^3}$. Die Gesamtmasse des Gemisches beträgt $m = 1200\,\mathrm{kg}$ und das Kesselvolumen $V = 2\,\mathrm{m^3}$. Das Gemisch strömt über eine Mündung mit veränderlichem Querschnitt in Form einer homogenen, isothermen, reibungsfreien und stationären Zweiphasenströmung ins Freie. Der Druck im Kessel $p_0 = 2{,}11\,\mathrm{bar}$ bleibt dabei konstant. Der Durchmesser am Austritt beträgt $d = 5\,\mathrm{cm}$.



a) Berechnen Sie die Dichte ρ_0 des Gesamtgemisches im Kessel, die Massenanteile x und $(1-x)$ sowie die Volumenanteile α_0 und $(1-\alpha_0)$ des Gases bzw. des Wassers.

b) Berechnen Sie die isotherme Schallgeschwindigkeit $c_{xT,0}$ für das Zweiphasengemisch im Kessel.

c) Wie groß ist der Druck p im Freien, wenn am Austritt gerade Schallgeschwindigkeit herrscht? Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit am Ende der Leitung.

d) Berechnen Sie die kritische Massenstromdichte $\rho^* v^*$ sowie den maximalen Massenstrom $\dot{m}$.

Formelsammlung
verallgemeinerte Bernoulligleichung:

$$\rho_1 \frac{v^2}{2} + p + \rho_1 g(z - z_\mathrm{r}) = \rho_1 \frac{v_\mathrm{r}^2}{2} + p_\mathrm{r}\left[1 + \frac{\alpha_\mathrm{r}}{1-\alpha_\mathrm{r}} \ln\left(\frac{p_\mathrm{r}}{p}\right)\right]$$

kritisches Druckverhältnis:

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0}\frac{p^*}{p_0}\right)^2$$

Rohrströmung mit Reibung:

$$\frac{\lambda_\mathrm{R}}{2d}(z - z_\mathrm{r}) = K\left(\frac{1}{M_\mathrm{r}} - \frac{1}{M}\right) + K^2 \ln\left(\frac{M_\mathrm{r}}{M}\right) + (1 - K^2)\ln\left(\frac{1 + KM_\mathrm{r}}{1 + KM}\right), \quad K = \frac{\alpha}{(1-\alpha)M}$$

Lösung

a)

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{1200}{2} = 600\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Mit $\rho_0 = (1-\alpha_0)\rho_1 + \alpha_0\rho_{20}$ folgt

$$\alpha_0 = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_{20} - \rho_1} = \frac{600 - 998{,}2}{2{,}77 - 998{,}2} = 0{,}4.$$

$$x = \alpha_0 \frac{\rho_{20}}{\rho_0} = 0{,}4 \frac{2{,}77}{600} = 1{,}847 \cdot 10^{-3}.$$

Sowie $1 - \alpha_0 = 0{,}6$, $1 - x = 0{,}998153$.
b)

$$c_{xT,0} = \sqrt{\frac{p_0}{\alpha_0 \rho_0}} = \sqrt{\frac{2{,}11 \cdot 10^5}{0{,}4 \cdot 600}} = 29{,}65 \text{ m/s}.$$

c) Falls am Austritt gerade Schallgeschwindigkeit herrscht, ist der Druck p gerade gleich dem kritischen Druck p^*. Es muss also, ausgehend vom bekannten Kesselzustand 0, das kritische Druckverhältnis p^*/p_0 berechnet werden. Daraus erhält man schließlich p^*.
Einsetzen von $1 - \alpha_0 = 0{,}6$, $\alpha_0 = 0{,}4$ in die Formel für das kritische Druckverhältnis,

$$1{,}5 \left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 1{,}5\frac{p^*}{p_0}\right)^2.$$

Zu lösen per Newton-Iteration, $x_{i+1} = x_i - \dfrac{F(x_i)}{F'(x_i)}$,

$$F\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = 0{,}5\left(1 + 1{,}5\frac{p^*}{p_0}\right)^2 - 1{,}5 + 1{,}5\frac{p^*}{p_0} + \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$F\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = -1 + 3\frac{p^*}{p_0} + 1{,}125\frac{p^*}{p_0} + \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right).$$

$$F'\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = 3 + 2{,}25\frac{p^*}{p_0} + \left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{-1}.$$

Startwert: $\left(\dfrac{p^*}{p_0}\right)_0 = 0{,}5$.

$$\left(\frac{p^*}{p_0}\right)_1 = 0{,}5 - \frac{-1 + 1{,}5 + 1{,}125 \cdot 0{,}25 + \ln(0{,}5)}{3 + 2{,}25 \cdot 0{,}5 + 2} = 0{,}4856, \qquad \left(\frac{p^*}{p_0}\right)_2 = 0{,}4856.$$

Der Außendruck ist $p = p^* = p_0 \dfrac{p^*}{p_0} = 2{,}11 \cdot 0{,}4856 = 1{,}025$ bar.
Schallgeschwindigkeit: Mit $\dfrac{p_0 \alpha_0}{1 - \alpha_0} = \dfrac{p^* \alpha^*}{1 - \alpha^*}$ zuerst α^* berechnen, dann die Schallgeschwindigkeit c^*_{xT}.

$$(1 - \alpha^*)\frac{p_0}{p^*}\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} = \alpha^*, \qquad \alpha^* = \left(1 + \frac{p^*}{p_0}\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}\right)^{-1} = (1 + 0{,}4856 \cdot 1{,}5)^{-1} = 0{,}579.$$

$$c^*_{xT} = \sqrt{\frac{p^*}{\alpha^*(1 - \alpha^*)\rho_1}} = \sqrt{\frac{1{,}025 \cdot 10^5}{0{,}579 \cdot 0{,}421 \cdot 998{,}2}} = 20{,}52 \text{ m/s}.$$

d) Kritische Massenstromdichte $\rho^* v^*$,

$$\rho^* v^* = \rho^* c^*_{xT} = \rho_0 c_{xT,0} \frac{p^*}{p_0} = 600 \cdot 29{,}65 \cdot 0{,}4856 = 8639 \text{ kg/m}^2\text{s}.$$

Maximaler Massenstrom

$$m^* = \rho^* v^* A = 8639 \cdot \frac{5^2 \cdot 10^{-4} \pi}{4} = 16{,}96 \text{ kg/s}.$$

Beispiel `SicherhVentil`

In einem Kessel befindet sich ein Gemisch aus Öl ($\rho_1 = 870$ kg/m^3) und Luft ($R_\mathrm{L} = 287{,}06$ J/kgK) bei einer Temperatur $T = 295$ K. Bei einem Druck von $p_0 = 3{,}2$ bar im Kessel beträgt die Schallgeschwindigkeit $c_{xT,0} = 42{,}1$ m/s.

a) Berechnen Sie den Volumenanteil α_0 der Luft im Kessel. Bei gegebener Schallgeschwindigkeit $c_{xT,0}$ sind zwei verschiedene Werte für α_0 möglich. Nehmen Sie den niedrigeren Wert.

Ein Sicherheitsventil soll so ausgelegt werden, dass bei einem Umgebungsdruck von $p_\mathrm{E} = 1$ bar mindestens ein Massenstrom von $\dot{m} = 10$ kg/s ausströmen kann. Berechnen Sie unter der Annahme einer reibungsfreien Düsenströmung

b) die minimal nötige Querschnittsfläche des Ventils.

c) Bis zu welchem Gegendruck $p_\mathrm{E,max}$ bleibt der Massenstrom konstant?

Eine 20 m lange Rohrleitung mit der in (b) berechneten Querschnittsfläche und mit dem Rohrreibungsbeiwert $\lambda_\mathrm{R} = 0{,}02$ wird an die Düse angeflanscht.

d) Wie hoch muss der Druck im Kessel steigen, damit wieder ein Massenstrom von $\dot{m} = 10$ kg/s durch das Rohr strömt?

Formelsammlung
verallgemeinerte Bernoulligleichung:

$$\rho_1 \frac{v^2}{2} + p + \rho_1 g(z - z_\mathrm{r}) = \rho_1 \frac{v_\mathrm{r}^2}{2} + p_\mathrm{r}\left[1 + \frac{\alpha_\mathrm{r}}{1-\alpha_\mathrm{r}} \ln\left(\frac{p_\mathrm{r}}{p}\right)\right]$$

kritisches Druckverhältnis:

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0}\frac{p^*}{p_0}\right)^2$$

Rohrströmung mit Reibung:

$$\frac{\lambda_\mathrm{R}}{2d}(z - z_\mathrm{r}) = K\left(\frac{1}{M_\mathrm{r}} - \frac{1}{M}\right) + K^2 \ln\left(\frac{M_\mathrm{r}}{M}\right) + (1-K^2)\ln\left(\frac{1+KM_\mathrm{r}}{1+KM}\right), \quad K = \frac{\alpha}{(1-\alpha)M}$$

Lösung

Rechengang (a)–(c):
Das Druckverhältnis p_E/p_0 ist wahrscheinlich kleiner als das kritische Druckverhältnis p^*/p_0. Stimmt das, so wird in der Düse der kritische Zustand erreicht. Das Gemisch expandiert nur bis zum kritischen Druck p^*, nicht bis zum Umgebungsdruck p_E. Das Gemisch erreicht die kritische Schallgeschwindigkeit, $v_\mathrm{E} = c_{xT}^*$. Mit der kritischen Masssenstromdichte $\rho^* v^* = \rho^* c_{xT}^*$ lässt sich schließlich die Querschnittsfläche A berechnen.

- Kesselzustand bestimmen. Aus $c_{xT,0}$ folgt α_0.
- Kritisches Druckverhältnis p^*/p_0 berechnen. Überprüfen, ob $p_\mathrm{E}/p_0 < p^*/p_0$.
- Kritische Zustandsgrößen α^* und c_{xT}^* bestimmen.
- Aus $\rho^* v^*$ und $\dot{m}$ die Querschnittsfläche A berechnen.

a) Kesselzustand:

$$c_{xT,0} = \sqrt{\frac{p_0}{\alpha_0(1-\alpha_0)\rho_1}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 - \alpha_0^2 = \frac{p_0}{\rho_1 c_{xT,0}^2} = \frac{3{,}2 \cdot 10^5}{870 \cdot 42{,}1^2} = 0{,}2075$$

Zwei Lösungen:

$$\alpha_{0\,1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 0{,}2075} = 0{,}5 \pm 0{,}206$$

a) Volumenanteil der Luft: $\alpha_0 = 0{,}294$.
b)
In Gleichung für kritisches Druckverhältnis einsetzen:

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{0{,}706}{0{,}294} = 2{,}4; \quad 2{,}4\left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{p^*}{p_0}\right) = 0{,}5\left(1 + 2{,}4\frac{p^*}{p_0}\right)^2$$

Newton-Verfahren: $\dfrac{p^*}{p_0} \mapsto x$, $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$f(x) = 0{,}5(1+2{,}4x)^2 + \ln(x) - 2{,}4 + 2{,}4x = 2{,}88x^2 + 4{,}8x + \ln(x) - 1{,}9$$

$$f'(x) = 5{,}76x + 4{,}8 + x^{-1}$$

Startwert: $x_0 = 0{,}5$; $\quad x_1 = 0{,}5 - \frac{0{,}5269}{9{,}68} = 0{,}4456$

$x_2 = 0{,}4456 - \frac{2{,}397 \cdot 10^{-3}}{9{,}61} = 0{,}4454$

Kritisches Druckverhältnis: $\dfrac{p^*}{p_0} = 0{,}445$, $\quad p^* = 1{,}42$ bar.
Wegen $p_E < p^*$ wird in der Düse der kritische Zustand erreicht (choked flow). Das Gemisch strömt mit der kritischen Schallgeschwindigkeit c_{xT}^* beim kritischen Druck p^* aus dem Kessel (und expandiert in der Umgebung nach).
Berechnung der kritischen Größen:

$$\frac{p_0\alpha_0}{1-\alpha_0} = \frac{p^*\alpha^*}{1-\alpha^*} \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \left(1 + \frac{p^*}{p_0}\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{-1} = (1 - 0{,}445 \cdot 2{,}4)^{-1} = 0{,}484.$$

$$c_{xT}^* = \sqrt{\frac{p^*}{\alpha^*(1-\alpha^*)\rho_1}} = \sqrt{\frac{1{,}42 \cdot 10^5}{0{,}484 \cdot 0{,}516 \cdot 870}} = 25{,}56 \text{ m/s}.$$

$$\rho^* = (1-\alpha^*)\rho_1 = 449 \text{ kg/m}^3; \qquad \rho^* c_{xT}^* = 11\,480 \text{ kg/m}^2\text{s}.$$

b) minimale Querschnittsfläche: $A = \dfrac{\dot{m}}{\rho^* c_{xT}^*} = \dfrac{10}{11480} = 8{,}71 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 8{,}71\ \text{cm}^2$.
c) maximaler Gegendruck: $p_{E,\max} = p^* = 1{,}42$ bar.
d) Die Strömung durch das Rohr muss den kritischen Zustand erreichen (choked flow), da die kritische Massenstromdichte (bei $p^* = 1{,}42$ bar) größer ist als die maximal mögliche Massenstromdichte bei $p_E = 1$ bar.

$$\frac{\rho^* c^*}{\rho_E c_E} = \frac{p^*}{p_E} \quad \Rightarrow \quad \rho_E c_E = \rho^* c^* \frac{1}{1{,}42} < \rho^* c^*.$$

Am Ende des Rohres wird $M = 1$ erreicht. Einsetzen in Gl. für Rohrströmung, $p^* \mapsto p$, $\alpha^* \mapsto \alpha$.

$$K = \frac{\alpha^*}{(1-\alpha^*)1} = \frac{0{,}484}{0{,}516} = 0{,}938, \quad z - z_r = 20 \text{ m}, \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 8{,}71}{\pi}} = 3{,}33 \text{ cm}.$$

$$\frac{0{,}02}{2 \cdot 0{,}0333} \cdot 20 = 0{,}938\left(\frac{1}{M_r} - 1\right) + 0{,}938^2 \ln(M_r) + (1 - 0{,}938^2)\ln\left(\frac{1 + 0{,}938M_r}{1{,}938}\right)$$

$$6{,}006 = \frac{0{,}938}{M_r} - 0{,}938 + 0{,}8798\ln(M_r) + 0{,}1202\ln(1 + 0{,}938M_r) - 0{,}07953$$

Iteration per Newton-Verfahren:

$$f(M_\mathrm{r}) = -7{,}024 + \frac{0{,}938}{M_\mathrm{r}} + 0{,}8798\ln(M_\mathrm{r}) + 0{,}1202\ln(1+0{,}938M_\mathrm{r})$$

$$f'(M_\mathrm{r}) = -\frac{0{,}938}{M_\mathrm{r}^2} + \frac{0{,}8798}{M_\mathrm{r}} + \frac{0{,}1127}{1+0{,}938M_\mathrm{r}}$$

Startwert: $M_{\mathrm{r},0} = 0{,}1$ ($M_{\mathrm{r},0} = 0{,}5$, $M_{\mathrm{r},0} = 1$ geht nicht.); $M_{\mathrm{r},1} = 0{,}1 - \dfrac{0{,}341}{-84{,}9} = 0{,}104$.

$$p_\mathrm{r} M_\mathrm{r} = p^* M^* \quad \Rightarrow \quad p_\mathrm{r} = \frac{1{,}42 \cdot 1}{0{,}104} = 13{,}75 \text{ bar.}$$

Der Druck $p_\mathrm{r} = 13{,}65$ bar herrscht am Beginn der Rohrleitung. Zur (groben) Berechnung des Kesseldruckes nehmen wir an, dass die vollausgebildete Rohrströmung gleich an die reibungsfreie Strömung durch die Düse anschließt. Es wird der nötige Ruhedruck p_1 berechnet, um das Gemisch in einer Düse auf $M_\mathrm{r} = 0{,}104$ zu beschleunigen.
Geschwindigkeit berechnen:

$$\frac{p_\mathrm{r}\alpha_\mathrm{r}}{1-\alpha_\mathrm{r}} = \frac{p^*\alpha^*}{1-\alpha^*} = \frac{p_0\alpha_0}{1-\alpha_0},$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_\mathrm{r} = \left(1 + \frac{p_\mathrm{r}}{p_0}\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{13{,}7}{3{,}2}2{,}4\right)^{-1} = 0{,}0887$$

$$c_{xT,\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{p_\mathrm{r}}{\alpha_\mathrm{r}(1-\alpha_\mathrm{r})\rho_1}} = \sqrt{\frac{13{,}7 \cdot 10^5}{0{,}0887 \cdot 0{,}9113 \cdot 870}} = 139{,}6 \text{ m/s.}$$

$$v_\mathrm{r} = M_\mathrm{r} c_\mathrm{r} = 0{,}104 \cdot 139{,}6 = 14{,}5 \text{ m/s.}$$

Einsetzen in verallg. Bernoulligl.: $p_1 \mapsto p$, $v = 0$.

$$p_1 = 870 \cdot \frac{14{,}5^2}{2} + 13{,}7 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{0{,}0887}{0{,}9113}\ln\left(\frac{13{,}7}{p_1/\mathrm{bar}}\right)\right)$$

$$p_1/\mathrm{bar} = 14{,}61 + 1{,}333\ln\left(\frac{13{,}7}{p_1/\mathrm{bar}}\right)$$

Newton-Verfahren: $f(p_1) = -p_1 + 14{,}61 + 1{,}333\ln(13{,}7/p_1)$, $f'(p_1) = -1 - 1{,}333/p_1$,

$$p_{1,0} = 14{,}5; \quad p_{1,1} = 14{,}5 - \frac{-14{,}5 + 14{,}61 + 1{,}333\ln(13{,}7/14{,}5)}{-1 - 1{,}333/14{,}5} = 14{,}5 - 0{,}0345/(-1{,}092) = 14{,}53 \text{ bar.}$$

Der Kesseldruck muss $p_1 = 14{,}53$ bar betragen.

Beispiel `Wirbelschicht`

In einem Rohr mit dem Innendurchmesser von 80 cm soll Kohlestaub in einer Wirbelschicht verbrannt werden. Berechnen Sie das Verhalten der Wirbelschicht bei einer Temperatur der Luft von $\vartheta = 70\,°\mathrm{C}$ ($\rho_1 = 1$ kg/m^3, $\nu = 2{\cdot}10^{-5}$ m^2/s). Der Kohlestaub bestehe aus Partikel mit einem Durchmesser von 2 mm, die Dichte beträgt $\rho_2 = 1300$ kg/m^3. Die Sinkgeschwindigkeit eines Teilchens betrage $U = 8{,}2$ m/s. Die Teilchen verhalten sich entsprechend der Driftfluss-Relation von Richardson und Zaki, $j_{12} = \alpha(1-\alpha)^{2{,}39}U$, mit $\alpha_{\max} = 0{,}6$.

a) Wie groß ist der minimale nötige Volumenstrom an Luft, um das Festbett zu lösen und eine Wirbelschicht zu erzeugen? Zeichnen Sie die Lösung für die Volumenstromdichte in den Graphen unten ein. Falls Sie die Aufgabe graphisch lösen, machen Sie die Konstruktion der Lösung deutlich.

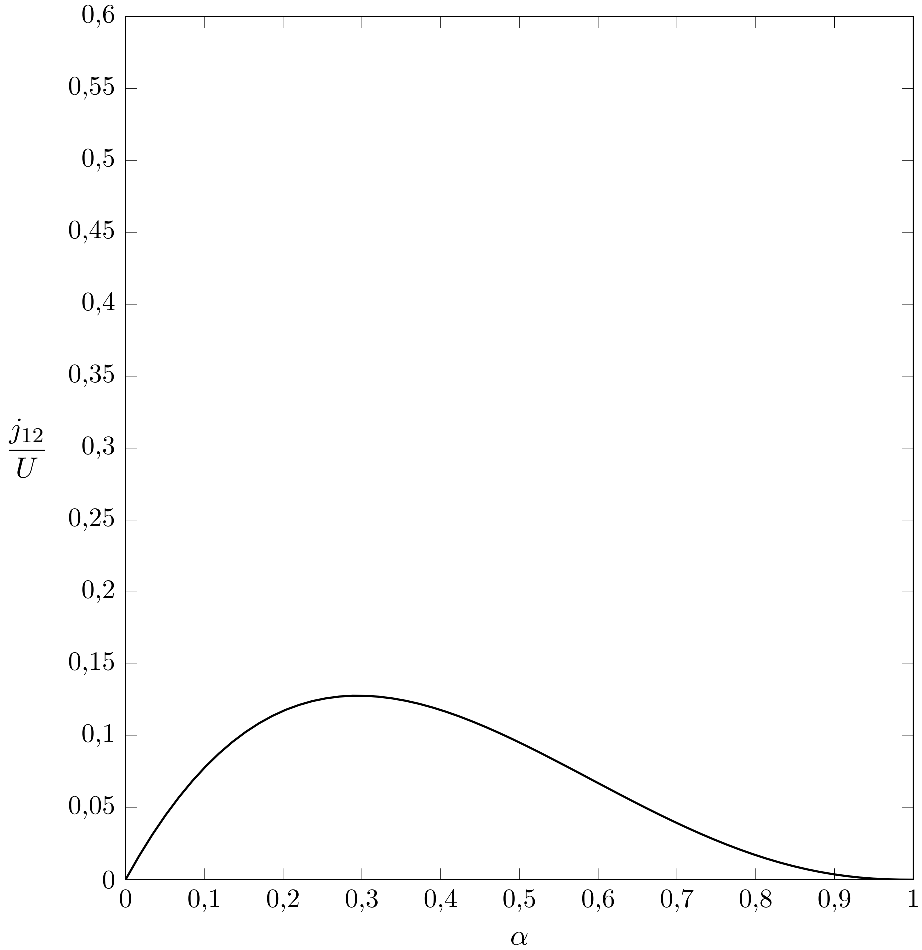
b) Wie hoch ist die maximal mögliche Volumenstromdichte der Luft? Wie groß ist der entsprechende Volumenstrom?

c) Welcher Volumenstrom ist nötig, um die Wirbelschicht zu einer Teilchenkonzentration von $\alpha = 0{,}2$ zu expandieren? Zeichnen Sie die Lösung für die Volumenstromdichte in den Graphen unten ein. Falls Sie die Aufgabe graphisch lösen, machen Sie die Konstruktion der Lösung deutlich.

d) Welche Masse an Kohle ist, bei $\alpha = 0{,}2$, in der Wirbelschicht vorhanden, wenn die Wirbelschicht eine Höhe von $H = 1{,}8$ m hat?

e) Wie groß ist die Druckdifferenz Δp über die Wirbelschicht.

f) Zum Zeitpunkt t_0 werde das Gebläse abgestellt. Wie lange braucht es, bis die Wirbelschicht von $\alpha = 0{,}2$ zu einem Festbett zusammengesunken ist? Welche Höhe hat das Festbett nach dem Abschluss der Sedimentation?



Driftfluss-Relation von Richardson und Zaki, $j_{12}/U = \alpha(1-\alpha)^{2,39}$.

Lösung

Die Sinkgeschwindigkeit war gegeben, dennoch hier die Berechnung der Sinkgeschwindigkeit:

$$g\underbrace{(\rho_2-\rho_1)}_{\approx\rho_2,\ \text{wg. }\rho_1\ll\rho_2} 4R^3\pi/3 = c_\mathrm{w}\rho_1 U^2 R^2\pi/2,$$

$$\frac{8Rg}{3c_\mathrm{w}}\frac{\rho_2}{\rho_1} = U^2; \qquad U = \sqrt{\frac{8\cdot 1\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81}{3\cdot 0{,}5}\cdot 1{,}3\cdot 10^3} = 8{,}247\ \mathrm{m/s}.$$

$\mathrm{Re}_U = \dfrac{8{,}2\cdot 2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-5}} = 820$. Zu verwenden ist die Driftflussbeziehung für $\mathrm{Re}_U > 500$, $j_{12}/U = \alpha(1-\alpha)^{2,39}$.

a)
Die untere kritische Volumenstromdichte j_1^* ergibt sich aus dem Wert des Driftflusses bei $\alpha = \alpha_\mathrm{max}$, $\alpha_\mathrm{max} = 0{,}6$,

$$j_{12}(\alpha = 0{,}6) = 0{,}6\cdot 0{,}4^{2,39}U = 0{,}06714U.$$

Geradengleichung: $j_1^* = \dfrac{j_{12}^*}{\alpha} = \dfrac{0{,}06715U}{0{,}6} = 0{,}112U = 0{,}918\ \mathrm{m/s}$.
(Auch: $j_2 = \alpha j - j_{12}$, mit $j_2 = 0$ ist $j = j_{12}/\alpha$, daher ist $j_1 = (1-\alpha)j + j_{12} = j_{12}/\alpha$.)

$$\dot V_1^* = j_1^* A; \quad A = R^2\pi = 0{,}4^2\ \pi = 0{,}5027\ \mathrm{m}^2.$$

$$\dot V_1^* = 0{,}918\cdot 0{,}5 = 0{,}46\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

b)

$$j_1^{**} = U = 8{,}2\ \mathrm{m/s}; \quad \dot V_1^{**} = 8{,}2\cdot 0{,}5 = 4{,}1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

c)
j_1 ergibt sich aus dem Wert von j_{12} für $\alpha = 0{,}2$,

$$j_{12}(\alpha = 0{,}2) = 0{,}2\cdot 0{,}8^{2,39}U = 0{,}1173U.$$

Wie oben ist $j_1 = j_{12}/\alpha = 0{,}1173U/0{,}2 = 0{,}587U = 4{,}81\ \mathrm{m/s}$.

$$\dot V_1^* = j_1 A = 4{,}81\cdot 0{,}5 = 2{,}41\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

d)

$$V = AH = 0{,}5027\cdot 1{,}8 = 0{,}905\ \mathrm{m}^3; \quad m_2 = V_2\rho_2 = \alpha V\rho_2 = 0{,}2\cdot 0{,}905\cdot 1300 = 235{,}3\ \mathrm{kg}.$$

e)

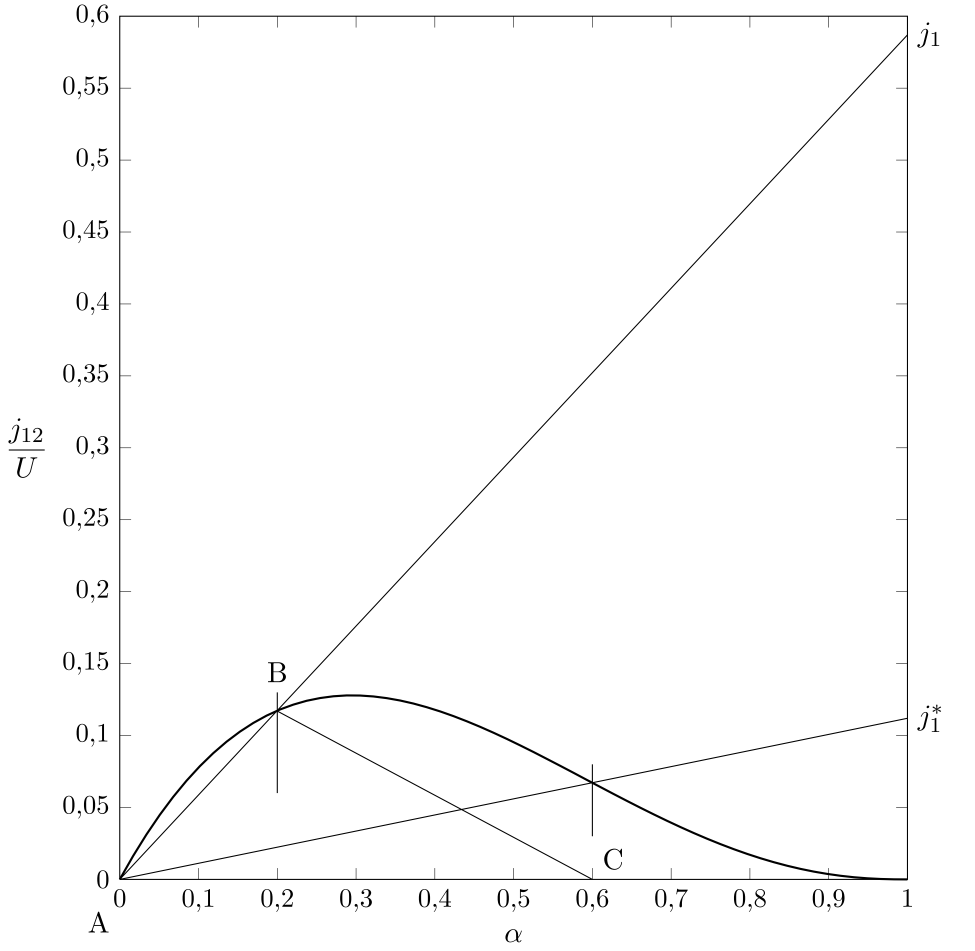
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = ((1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2)g \approx 0{,}2\cdot 1300g = 2550\ \mathrm{Pa/m}.$$

$$\Delta p = 2550\cdot 1{,}8 = 4590\ \mathrm{Pa} = 0{,}04\ \mathrm{bar}.$$

f)
Stoßgeschwindigkeit $|C_\mathrm{AB}| = \dfrac{j_{12}(\alpha = 0{,}2)}{0{,}2} =$ (siehe c) $4{,}81\ \mathrm{m/s}$.
Höhe des Festbettes h:

$$h\cdot 0{,}6 = H\cdot 0{,}2, \quad h = 1{,}8\cdot 0{,}2/0{,}6 = 0{,}6\ \mathrm{m}.$$

$$t_\mathrm{S} = \frac{H-h}{|C_\mathrm{AB}|} = \frac{1{,}2}{4{,}81} = 0{,}25\ \mathrm{s}.$$


0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
$\frac{j_{12}}{U}$
j_1
j_1^*
B
C
A
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α