1. Test VU Wärmeübertragung, Lösung 8. 11. 2011

A1) Definieren Sie den Wärmeübergangskoeffizienten α. Bezeichnen Sie die verwendeten Größen und geben Sie deren Einheiten sowie die des Wärmeübergangskoeffizienten an.

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{\Delta T} \; [\mathrm{W/m^2K}],$$

mit $\dot{q}$ ... Wärmestromdichte [W/m^2], ΔT ... Temperaturdifferenz zwischen der Wand und der Umgebung (einem Punkt fern von der Wand) [K].

A2) Wie lautet die Wärmeleitungsgleichung im ein-dimensionalen Fall?

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

A3) Die Wärmeleitung von zwei Stäben im thermischen Kontakt wird durch die Größen $T-T_1$, T_1-T_2, ρc_p, λ, x und t beeinflusst. Wie viele dimensionslose Kennzahlen können Sie damit bilden? Geben Sie diese Kennzahlen an.

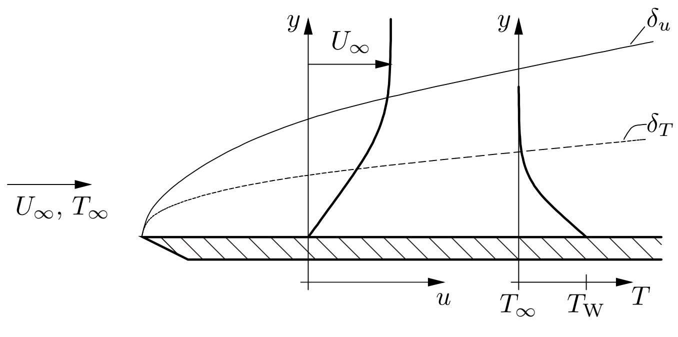
6 Einflussgrößen − 4 Grundgrößen (Länge, Zeit, Masse, Temperatur) = 2 dimensionslose Kennzahlen:

$$\theta = \frac{T-T_1}{T_1-T_2}, \quad \frac{\lambda t}{\rho c_p x^2} \text{ oder } \frac{\sqrt{at}}{x}.$$

A4) Wie ist die Mischtemperatur in einer Rohrströmung definiert?

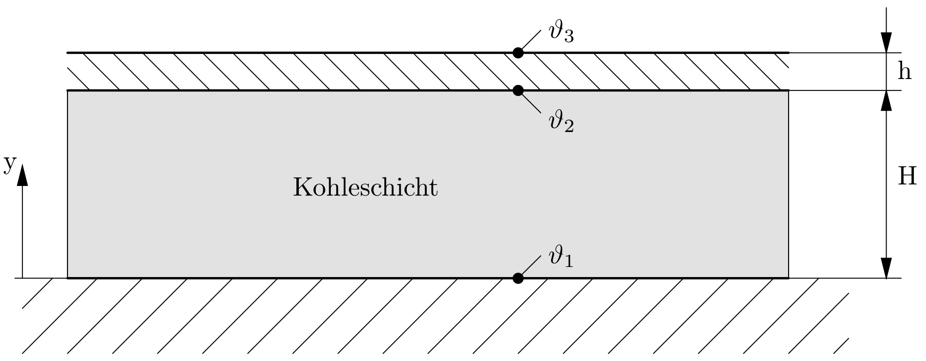
$$T_\mathrm{M} = \frac{\dot{H}}{\dot{m} c_p}$$

A5) Skizzieren Sie an der parallel angeströmten, beheizten, ebenen Platte den Verlauf der Dicken der Geschwindigkeits- und der Temperaturgrenzschicht für den laminaren Fall. Tragen Sie in die Skizze auch ein Geschwindigkeits- und ein Temperaturprofil ein.



Hier für Pr > 1 gezeichnet.

Eine $H = 2\,\mathrm{m}$ dicke Schicht von Kohlestaub der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_\mathrm{K} = 0{,}2\,\mathrm{W/mK}$ ist auf einem adiabaten Fundament gelagert. Aufgrund von chemischen Reaktionen wird gleichmäßig über die gesamte Kohleschicht die Reaktionswärme von $30\,\mathrm{W/m^3}$ frei. Die Kohleschicht wird von einer Betonplatte der Dicke $h = 8\,\mathrm{cm}$ und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_\mathrm{B} = 1{,}6\,\mathrm{W/mK}$ abgedeckt. Die Temperatur an der Oberseite der Platte beträgt $\vartheta_3 = 22\,°\mathrm{C}$.



a) Berechnen Sie die nach oben an die Umgebung abgegebene Wärmestromdichte $\dot{q}_3$.

b) Berechnen Sie die Temperatur ϑ_2 an der Grenzfläche zwischen der Unterseite der Betonplatte und der Kohleschicht.

c) Berechnen Sie die Temperaturverteilung $\vartheta(y)$ in der Kohleschicht.

- Geben Sie die Randbedingungen an, die Sie für die Berechnung der Temperaturverteilung benötigen.
- Berechnen Sie die Temperatur ϑ_1 an der Unterseite der Kohleschicht, an der Stelle $y = 0$.

d) Skizzieren sie die Temperaturverteilung $\vartheta(y)$ in Kohleschicht und Betonplatte. Achten Sie auf die korrekten Steigungen der Kurve!

e) Geben Sie die maximale Temperatur an. In welcher Höhe y erreicht die Temperatur den maximalen Wert?

Lösungen bitte hier eintragen:

a) $\dot{q}_3 =$ 60 $\mathrm{W/m^2}$ ....

b) $\vartheta_2 =$ 25 °C ....

c) $\vartheta(y) = -\dfrac{\dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} H^2}{2\lambda_\mathrm{K}}\left(1 - \left(\dfrac{y}{H}\right)^2\right) + \vartheta_2$ ....

c) RB: adiabates Fundament: $\dot{q}(y=0) = 0$; $\vartheta(y = H) = \vartheta_2$ .... $\vartheta_1 =$ 325 °C ....

e) $\vartheta_\mathrm{max} =$ 325 ° C .... bei $y =$ 0 ....

a)
Mit $\dot{q}_2 = \dot{q}_3$ ergibt die Energiebilanz über die gesamte Kohleschicht $q_3 = \dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} H = 30 \cdot 2 = 60\ \mathrm{W/m^2K}$.
b)
Fouriersches Gesetz, $\dot{q}_3 = -\lambda_\mathrm{B} \dfrac{\vartheta_3 - \vartheta_2}{h}$,

$$\vartheta_2 = \frac{\dot{q}_3 h}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_3 = \frac{60 \cdot 0{,}08}{1{,}6} + 22 = 25\,^\circ\mathrm{C}.$$

c)
Lokale Energiebilanz, i.e., Energiebilanz an einem infinitesimal kleinen Kontrollvolumen,

$$\dot{q} - (\dot{q} + \mathrm{d}\dot{q}) + \dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} \mathrm{d}y = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}y} = \dot{q}_\mathrm{R}^{(V)}, \qquad \text{Integration: } \dot{q}(y) = \dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} y + c_1.$$

Randbedingung adiabates Fundament: $\dot{q}(y = 0) = 0$, daher: $c_1 = 0$.
Fouriersches Gesetz für $\dot{q}(y)$ einsetzen, weiter integrieren,

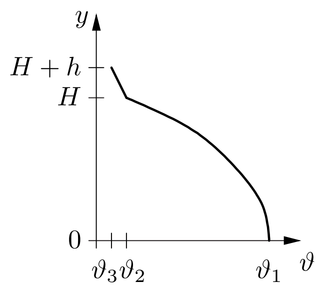
$$-\lambda_\mathrm{K} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = \dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} y, \qquad T(y) = -\frac{\dot{q}_\mathrm{R}^{(V)}}{\lambda_\mathrm{K}} \frac{y^2}{2} + c_2.$$

Randbedingung: $\vartheta(y = H) = \vartheta_2$, $\vartheta_2 = -\dfrac{\dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} H^2}{2\lambda_\mathrm{K}} + c_2$, somit

$$\vartheta(y) = \frac{\dot{q}_\mathrm{R}^{(V)} H^2}{2\lambda_\mathrm{K}} \left(1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right) + \vartheta_2.$$

$$\vartheta_1 = \vartheta(y = 0) = \frac{30 \cdot 2^2}{2 \cdot 0{,}2} + 25 = 325\,^\circ\mathrm{C}.$$

d)



Merkmale: Der Temperaturgradient ist in der Betondecke wesentlich geringer als in der Kohlenschicht, wegen $\lambda_\mathrm{B} \gg \lambda_\mathrm{K}$. An der Grenzfläche hat die Temperaturverteilung einen Knick. Weiters ist die Temperaturverteilung in der Kohlenschicht parabelförmig. Wegen des adiabaten Fundamentes ist die Tangente bei $y = 0$ senkrecht.
e)

$$\vartheta_\mathrm{max} = \vartheta_1 = 325\,^\circ\mathrm{C}, \qquad y(\vartheta = \vartheta_\mathrm{max}) = 0.$$

Weitere Lösungen:

ϑ_3	$\dot{q}_\mathrm{R}^{(V)}$	H	h	λ_B	λ_K	$\dot{q}_3$	ϑ_2	ϑ_1
20 °C	30 W/m^2	2 m	6 cm	1,8 W/mK	0,3 W/mK	60 W/m^2	22 °C	222 °C
21 °C	30 W/m^2	2 m	5 cm	1,5 W/mK	0,3 W/mK	60 W/m^2	23 °C	223 °C
23 °C	30 W/m^2	2 m	7 cm	1,4 W/mK	0,4 W/mK	60 W/m^2	26 °C	176 °C
24 °C	20 W/m^2	3 m	8 cm	1,6 W/mK	0,3 W/mK	60 W/m^2	27 °C	327 °C
25 °C	20 W/m^2	3 m	5 cm	1,5 W/mK	0,3 W/mK	60 W/m^2	27 °C	327 °C
26 °C	20 W/m^2	3 m	7 cm	1,4 W/mK	0,2 W/mK	60 W/m^2	29 °C	479 °C