2. Test VU Wärmeübertragung 20. 12. 2011

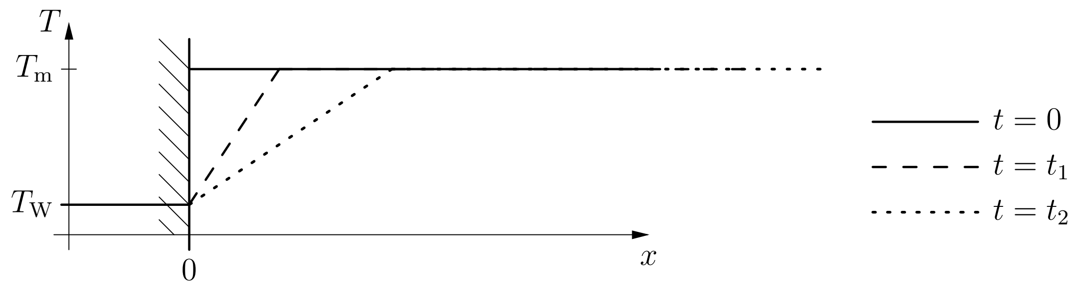
A1) Was versteht man unter der Boussinesq-Approximation?

Änderung der Dichte, z.B. aufgrund einer Temperaturänderung, werden nur im Auftriebsterm berücksichtigt.

A2) Was versteht man unter natürlicher bzw. erzwungener Konvektion?

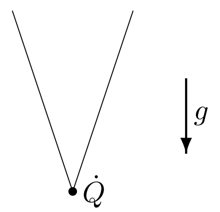
Bei natürlicher (oder freier) Konvektion wird die Strömung erst durch den Wärmeübergang, infolge von Dichteunterschieden im Fluid, erzeugt. Bei erzwungener Konvektion wird die Strömung des Fluids durch andere Mittel erzeugt.

A3) Betrachten Sie die ein-dimensionale Erstarrung eines reinen Stoffes: Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Raum $x > 0$ mit flüssiger Phase bei der Schmelztemperatur T_m gefüllt. Eine bei $x = 0$ gelegene Wand werde auf der konstanten Temperatur T_W gehalten, $T_\mathrm{W} < T_\mathrm{m}$. Skizzieren Sie die Temperaturverteilung zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2, $t_2 > t_1 > 0$. Die Stefan-Zahl sei groß, $\mathrm{Sf} = l_0/(c_p \Delta\vartheta) \gg 1$.



A4) Skizzieren Sie den Radius eines turbulenten Auftriebstrahles über der Höhe.

Der turbulente Auftriebsstrahl hat die Form eines Kegels, da der Radius linear mit der Höhe zunimmt.



A5) Welchen Vorgang beschreibt die Nußeltsche Filmkondensation? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Nußeltsche Theorie der Filmkondensation angewendet werden kann?

Die Nußeltsche Filmkondensation beschreibt die Kondensation eines Sattdampfes an einer gekühlten Wand. Vorausgesetzt wird (1.) der Dampf ist im einem Zustand vollständiger Sättigung, $T = T_\mathrm{sat}(p)$, (2.) die Temperatur der Wand sei konstant (3.) es bildet sich ein dünner Film, (4.) die Strömung ist laminar und (5.) das Kondensat kann als Newtonsches Medium betrachet werden.

Eine Glasscheibe der Höhe $h = 80$ cm und der Breite $b = 60$ cm trennt einen Innenraum mit der Temperatur $\vartheta_\mathrm{i} = 20\,°\mathrm{C}$ von außen. Die Außentemperatur beträgt $\vartheta_\mathrm{a} = -5\,°\mathrm{C}$. Berechnen Sie den Wärmestrom, der aufgrund natürlicher Konvektion von innen nach außen transportiert wird. Vernachlässigen Sie die Wärmeleitung in der Glasscheibe, d.h., die Glasscheibe habe überall dieselbe Temperatur ϑ_G, $\vartheta_\mathrm{G} = (\vartheta_\mathrm{i} + \vartheta_\mathrm{a})/2$.
Diskutieren Sie abschließend die Annahme $\vartheta_\mathrm{G} = (\vartheta_\mathrm{i} + \vartheta_\mathrm{a})/2$; Wie gut trifft diese Annahme zu? Die Dicke der Glasscheibe s ist 5 mm, die Wärmeleitfähigkeit des Glases $\lambda_\mathrm{G} = 0{,}9$ W/mK.

a) Geben Sie eine Skizze der Problemstellung. Zeichnen Sie die Konvektionsgrenzschichten ein und skizzieren Sie an einer beliebigen Stelle über einer horizontalen Koordinate das zu erwartende Temperaturprofil.

b) Geben Sie die nötigen Stoffwerte an, β_i und β_a, ν_i, ν_a, λ_i, λ_a und Pr. Geben Sie die Temperaturen an, für die Sie die Stoffwerte benötigen. Für Pr reicht ein ungefährer Wert. Lesen sie die Stoffwerte aus dem beigefügten Datenblatt ab. Interpolieren Sie, falls nötig.

c) Wie hoch ist die Rayleighzahl Ra_h auf einer der beiden Seiten. Sind die Grenzschichten laminar?

d) Berechnen sie die mittleren Nußeltzahlen Nu_Pi und Nu_Pa auf der Innen- und der Außenseite.

e) Wie hoch ist der übertragene Wärmestrom $\dot{Q}$? Falls Sie unterschiedliche Werte von $\mathrm{Nu}_{\mathrm{P}i}$ und $\mathrm{Nu}_{\mathrm{P}a}$ erhalten haben, berechnen Sie den Wärmestrom sowohl für die Innen- als auch die Außenseite, $\dot{Q}_\mathrm{i}$ und $\dot{Q}_\mathrm{a}$.

f) Diskutieren Sie die Annahme $\vartheta_\mathrm{G} = (\vartheta_\mathrm{i} + \vartheta_\mathrm{a})/2$; Wie gut trifft diese Annahme zu? Wie groß ist ungefähr der Fehler, den Sie durch diese Annahme machen?
Schätzen Sie ab, wie groß der Fehler ist, den Sie durch die Vernachlässigung der Wärmeleitung durch die Scheibe machen.

Zusatzfrage: Verbessern Sie das Ergebnis, z.B. durch Berücksichtigung der Wärmeleitung oder durch eine genauere Abschätzung von ϑ_G. Sind diese Korrekturen sinnvoll?

b)
β_i bzw. β_a werden bei der Innen- bzw. Außentemperatur abgelesen, die übrigen Stoffwerte bei den mittleren Temperaturen in den beiden Grenzschichten,

$$\beta_\mathrm{i} = \beta(\vartheta_\mathrm{i}) = \beta(20\,°\mathrm{C}) = 3{,}421 \cdot 10^{-3}\mathrm{K}^{-1},$$

$$\beta_\mathrm{a} = \beta(\vartheta_\mathrm{a}) = \beta(-5\,°\mathrm{C}) = 3{,}745 \cdot 10^{-3}\mathrm{K}^{-1}.$$

Die mittlere Temperatur für die innere Grenzschicht ist $(\vartheta_\mathrm{i} + \vartheta_\mathrm{G})/2 = 13{,}75\,°\mathrm{C}$, die mittlere Temperatur der äußeren Grenzschicht beträgt $1{,}25\,°\mathrm{C}$.

$$\nu_\mathrm{i} = \nu(13{,}75\,°\mathrm{C}) = 148 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad \lambda_\mathrm{i} = \lambda(13{,}75\,°\mathrm{C}) = 25{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W/mK}.$$

$$\nu_\mathrm{a} = \nu(1{,}25\,°\mathrm{C}) = 136{,}3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad \lambda_\mathrm{a} = \lambda(1{,}25\,°\mathrm{C}) = 24{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W/mK}.$$

Die Prandt-Zahl beträgt ungefähr 0,72.
c)
Damit sind die Grashofzahlen

$$\mathrm{Gr}_{h\mathrm{i}} = \frac{g\beta_\mathrm{i}(\vartheta_\mathrm{i} - \vartheta_\mathrm{G})h^3}{\nu_\mathrm{i}^2} = \frac{9{,}81 \cdot 3{,}421 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}8^3}{1{,}48^2 \cdot 10^{-10}} = 9{,}81 \cdot 10^8, \quad \mathrm{Gr}_{h\mathrm{a}} = 1{,}27 \cdot 10^9.$$

$$\mathrm{Ra}_{h\mathrm{i}} = 0{,}72 \cdot 9{,}81 \cdot 10^8 = 7 \cdot 10^8.$$

Die Strömung kommt am am Ende der Grenzschicht in den Umschlagbereich.
d)

Mit $\mathrm{Nu}_h = 0{,}4(\mathrm{Gr}_h)^{1/4}$, $\mathrm{Nu_P} = \frac{4}{3}\mathrm{Nu}_h$ folgt

$$\mathrm{Nu_{Pi}} = 94{,}4, \qquad \mathrm{Nu_{Pa}} = 100{,}7.$$

e)
Verwendung der Definition der Platten-Nußeltzahl, $\mathrm{Nu_P} = \dfrac{\dot{q}_\mathrm{m} h}{\lambda \Delta\vartheta}$, ergibt

$$\dot{Q}_\mathrm{i} = \dot{q}_\mathrm{m} h b = \mathrm{Nu_{Pi}} \lambda_\mathrm{i} (\vartheta_\mathrm{i} - \vartheta_\mathrm{G}) b = 94{,}4 \cdot 2{,}52 \cdot 10^{-2} \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}6 = 17{,}8 \text{ W},$$

$$\dot{Q}_\mathrm{a} = \mathrm{Nu_{Pa}} \lambda_\mathrm{a} (\vartheta_\mathrm{G} - \vartheta_\mathrm{a}) b = 18{,}4 \text{ W}.$$

f)
Die Annahme $\vartheta_\mathrm{G} = (\vartheta_\mathrm{i} + \vartheta_\mathrm{a})/2$ trifft nicht genau zu, da die Wärmeströme $\dot{Q}_\mathrm{i}$ und $\dot{Q}_\mathrm{a}$ ein wenig unterschiedlich sind. Der wahre Wärmestrom wird ungefähr beim Mittel von $\dot{Q}_\mathrm{i}$ und $\dot{Q}_\mathrm{a}$ liegen, der Fehler in den berechneten Wärmeströmen ist demnach ca.

$$\frac{\Delta\dot{Q}}{\dot{Q}} = \frac{(\dot{Q}_\mathrm{a} - \dot{Q}_\mathrm{i})/2}{\dot{Q}_\mathrm{i}} = 0{,}017.$$

Bei Berücksichtigung der Wärmeleitung durch die Scheibe müsste eine zusätzliche Temperaturdifferenz von ungefähr

$$\Delta\vartheta_\mathrm{G} \approx \frac{\dot{Q} s}{h b \lambda_\mathrm{G}} = \frac{18 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6} = 0{,}2\,^\circ\mathrm{C}$$

berücksichtigt werden. Der Fehler durch Vernachlässigung der Wärmeleitung durch die Glasscheibe beträgt ungefähr

$$\frac{\Delta\dot{Q}}{\dot{Q}} \approx \frac{5}{4} \frac{\Delta\vartheta_\mathrm{G}}{\vartheta_\mathrm{a} - \vartheta_\mathrm{i}} = \frac{5}{4} \frac{0{,}2}{25} = 0{,}01.$$

Der Faktor 5/4 rührt von der Proportionalität $\dot{Q} \propto \Delta\vartheta^{5/4}$ für die natürliche Konvektion an der senkrechten Wand her. (Für die Lösung des Beispiels muss dieser Faktor nicht berücksichtigt werden.)
Zusatzfrage
Nach außen wird ein wenig mehr Wärme abgeführt. Machen wir die Glascheibe ein wenig kälter, $\vartheta_\mathrm{G} = 7{,}5 - (4/5) \cdot 0{,}017 \cdot 12{,}5 = 7{,}33\,^\circ\mathrm{C}$. Berücksichtigen wir weiters die Temperaturdifferenz von $0{,}2\,^\circ\mathrm{C}$ über die Glasscheibe, dann erhalten wir das Ergebnis

$$\vartheta_{\mathrm{G}a} = 7{,}23\,^\circ\mathrm{C}, \quad \vartheta_{\mathrm{G}i} = 7{,}43\,^\circ\mathrm{C}, \qquad \dot{Q} = 0{,}99(\dot{Q}_\mathrm{i} + \dot{Q}_\mathrm{a})/2 = 17{,}9 \text{ W}.$$

Insbesondere für Fälle von natürlicher Konvektion sind Korrekturen von Fehlern im Prozent-Bereich nicht sinnvoll.
Probe, mit unveränderten Stoffwerten:

$$\mathrm{Nu_{Pi}} = 94{,}51, \quad \mathrm{Nu_{Pa}} = 100{,}05; \qquad \dot{Q}_\mathrm{i} = 17{,}96 \text{ W}, \quad \dot{Q}_\mathrm{a} = 17{,}84 \text{ W}.$$