3. Test VU Wärmeübertragung 24. 1. 2012

A1) Wie ist das Emissionsvermögen $\bar{\varepsilon}$ und das Absorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ einer beliebigen (nicht-schwarzen) strahlenden Wand definiert?

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\dot{q}_{\mathrm{em}}}{\dot{q}_{\mathrm{em,schwarz}}} = \frac{\dot{q}_{\mathrm{em}}}{\sigma T_{\mathrm{W}}^4}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\dot{q}_{\mathrm{abs}}}{\dot{q}_{\mathrm{ein}}}.$$

A2) Weshalb erwärmt sich ein von der Sonne bestrahltes Stück blankes Aluminium stärker als ein Stück Holz?

Das Verhältnis von Gesamtabsorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ bei der Temperatur der Sonne zu Gesamtemissionsvermögen $\bar{\varepsilon}$ bei Umgebungstemperatur ist für Aluminium größer als für Holz.

A3) Ein Hohlraum sei aus einem Material gemacht, das wie ein grauer Strahler mit $\varepsilon = 0{,}3$ strahle. Der Hohlraum befinde sich in vollem thermodynamischen Gleichgewicht. Wie hoch ist die spektrale Strahlungsintensität I_ν an einem beliebigen Punkt in diesem Hohlraum, im Vergleich zur spektralen Strahlungsintensität B_ν eines schwarzen Körpers bei derselben Temperatur?

$I_\nu = B_\nu$.

A4) Beschreiben Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme in der Bewegungsgleichung,

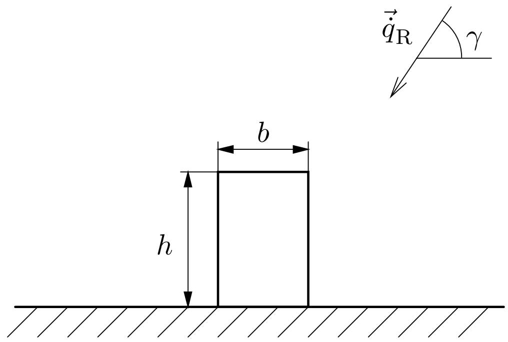
$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}.$$

Die Bewegungsleichung ist die lokale, d.h. auf einen Punkt angewendete, Fassung des 2. Newtonschen Gesetzes: Masse × Beschleunigung = Summe der Kräfte.
Der 1. Term links entspricht der instationäre Beschleunigung, der 2. Term links der konvektiven Beschleunigung eines Volumenelementes. Der 1. Term rechts entspricht Druckkräften, der 2. Term rechts Reibungskräften, oder genereller Schubspannungskräften, auf ein Volumenelement.

A5) Wie lautet die Strahlungstransportgleichung bei Vernachlässigung der Streuung? Geben Sie die Einheiten aller auftretenden Größen an.

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} = e_\nu - a_\nu I_\nu, \quad [I_\nu] = \mathrm{Ws/m^2},\ [e_\nu] = \mathrm{Ws/m^3},\ [a_\nu] = \mathrm{m^{-1}}.$$

Ein $L = 2$ m langer, $h = 60$ cm hoher und $b = 40$ cm breiter Betonquader ruht auf einem als adiabat anzunehmenden Untergrund. Der Quader wird unter einem Winkel $\gamma = 60°$ von der Sonne bestrahlt. Das Intensitätsmaximum der Solarstrahlung liegt bei $\nu_{I\mathrm{max}} = 3{,}53 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$, der Strahlungsfluss beträgt $\dot{q}_\mathrm{R} = 1200\ \mathrm{W/m^2}$. Die Temperatur der Umgebung beträgt 300 K. Der Strahlungsaustausch mit der Umgebung ist zu berücksichtigen. Die Wärmeleitung innerhalb des Quaders möge vernachlässigt werden, d.h., der Quader habe überall dieselbe Temperatur.



$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}},$$

$$\text{Wiensches Gesetz: } \frac{\nu_{I\mathrm{max}}}{T} = 5{,}88 \cdot 10^{10} s^{-1} K^{-1}.$$

a) Wie groß ist die Temperatur der Sonne T_S, wenn diese als schwarzer Strahler angesehen werden kann?

b) Berechnen Sie den vom Betonquader aufgrund der Bestrahlung durch die Sonne absorbierten Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{abs,S}$ sowie den durch Strahlung aus der Umgebung absorbierten Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{abs,U}$. Geben Sie die nötigen Werte der Absorptionsvermögen für den Betonquader an.

c) Wie hoch ist der vom Betonquader emittierte Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{em}$ bei einer Temperatur des Quaders von 300 K?

d) Welche Temperatur T_B hat der Betonquader im stationären Zustand?

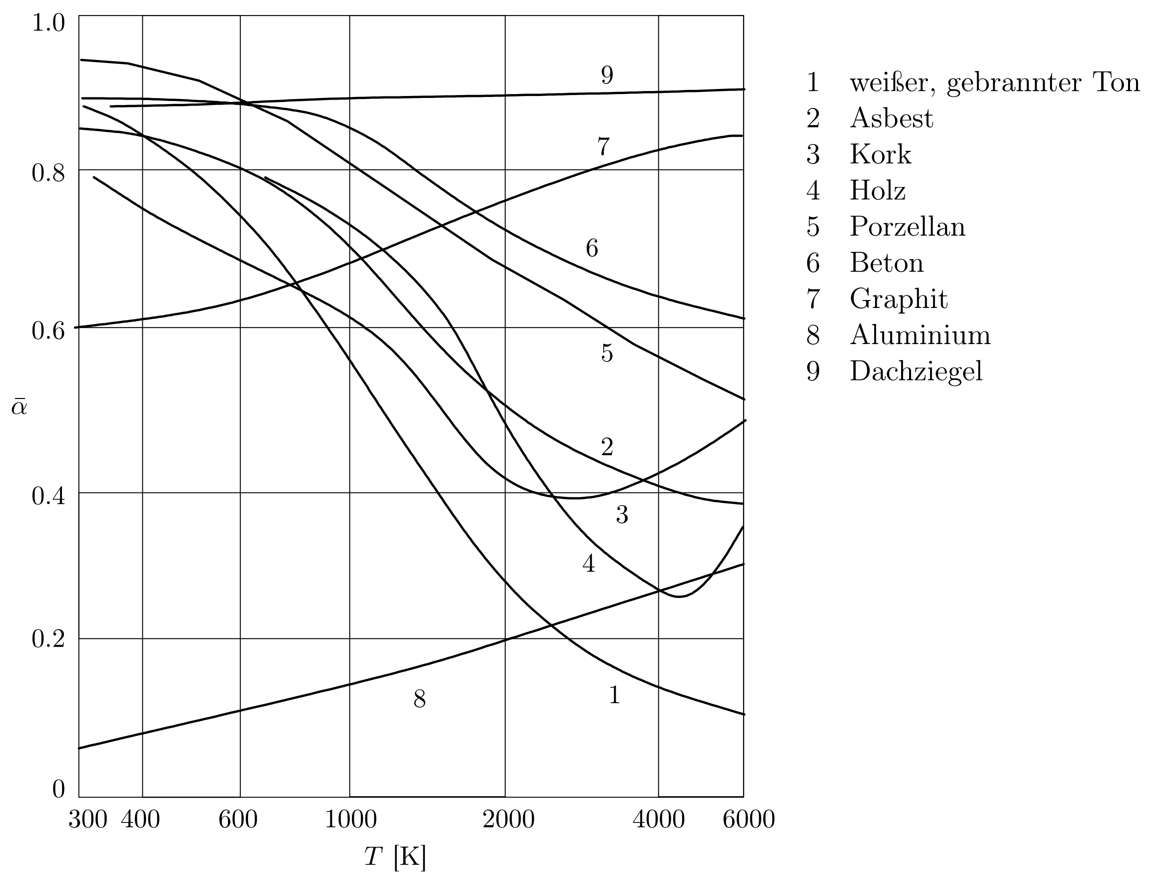


Fig. 5–13 aus Thomas (1992). Absorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ in Abhängigkeit von der Temperatur des strahlenden Körpers für verschiedene Materialien bei Raumtemperatur.

a)
Anwendung des Wienschen Gesetzes liefert

$$T_\mathrm{S} = \frac{\nu_{I\max}}{5{,}88 \cdot 10^{10}} = \frac{3{,}53}{5{,}88} \cdot 10^4 = 6003 \text{ K}.$$

b)
Die Absorptionsvermögen des Betonquaders bezüglich der Bestrahlung durch die Sonne und bezüglich der Strahlung aus der Umgebung sind

$$\bar{\alpha}(T_\mathrm{S}) = 0{,}62; \qquad \bar{\alpha}(T_\mathrm{U}) = 0{,}9.$$

Der aufgrund der Bestrahlung durch die Sonne absorbierte Wärmestrom ist

$$\dot{Q}_\mathrm{abs,S} = \bar{\alpha}(T_\mathrm{S})\dot{q}_\mathrm{R} A_\mathrm{proj}, \quad A_\mathrm{proj} = (h\cos\gamma + b\sin\gamma)L,$$

$$\dot{Q}_\mathrm{abs,S} = 0{,}62 \cdot 1200 \cdot (0{,}6\cos 60^\circ + 0{,}4\sin 60^\circ) \cdot 2 = 962 \text{ W}.$$

Mit der Umgebung tritt der Betonquader mit seiner gesamten Oberfläche, abzüglich des auf dem Boden aufliegen Flächenstückes, in Wechselwirkung,

$$\dot{Q}_\mathrm{abs,U} = \bar{\alpha}(T_\mathrm{U})\sigma T_\mathrm{U}^4 A, \quad A = (2h+b)L + 2hb,$$

$$\dot{Q}_\mathrm{abs,U} = 0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 \cdot ((1{,}2+0{,}4)\cdot 2 + 2\cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6) = 1521 \text{ W}.$$

c)

$$\dot{Q}_\mathrm{em} = \bar{\varepsilon}(300 \text{ K})\sigma 300^4 A = \dot{Q}_\mathrm{abs,U} = 1521 \text{ W}.$$

d)
Im stationären Zustand muss gelten $\dot{Q}_\mathrm{em} = \dot{Q}_\mathrm{abs}$. Der gesamte absorbierte Strahlungsstrom ist $\dot{Q}_\mathrm{abs} = \dot{Q}_\mathrm{abs,U} + \dot{Q}_\mathrm{abs,S} = 2483$ W. Mit $\dot{Q}_\mathrm{em} = \varepsilon\sigma T_\mathrm{B}^4 A$ folgt

$$T_\mathrm{B} = \left(\frac{\dot{Q}_\mathrm{abs}}{\varepsilon\sigma A}\right)^{1/4} = \frac{2483}{0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}68} = 339 \text{ K}.$$

Weitere Werte:
$h = 50$ cm, $b = 30$ cm: $\dot{Q}_\mathrm{abs,U} = 1199$ W, $\dot{Q}_\mathrm{abs,S} = 759$ W, $T_\mathrm{B} = 339$ K.
$h = 70$ cm, $b = 40$ cm: $\dot{Q}_\mathrm{abs,U} = 1719$ W, $\dot{Q}_\mathrm{abs,S} = 1036$ W, $T_\mathrm{B} = 338$ K.
$h = 70$ cm, $b = 30$ cm: $\dot{Q}_\mathrm{abs,U} = 1579$ W, $\dot{Q}_\mathrm{abs,S} = 907$ W, $T_\mathrm{B} = 336$ K.

Folgendes Beispiel wurde schließlich doch nicht gegeben; Hier ist es zur Information gedruckt:

Die Volumen-Absorptionskoeffizienten von Wasser ist für verschiedene Wellenlängen gemäß untenstehender Tabelle gegeben. Berechnen Sie die Dämpfungslänge, d.h. den Weg, über den transmittierte Strahlung auf das $1/e$-fache ihres ursprünglichen Wertes reduziert wird, für sichtbares Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 450$ nm.
Ungefähre Wellenlängen sichtbaren Lichts: Rot 640 nm, Grün 530 nm, Blau 470 nm, Violett 420 nm.

λ [µm]	a_λ [cm^{-1}]	λ [µm]	a_λ [cm^{-1}]	λ [µm]	a_λ [cm^{-1}]
0,20	0,0691	0,65	0,0032	3,0	11400
0,30	0,0067	0,70	0,0060	4,0	145
0,40	0,00058	0,75	0,0261	5,0	312
0,45	0,00029	0,80	0,0196	6,0	2240
0,50	0,00025	0,90	0,0679	7,0	574
0,55	0,000045	1,0	0,363	8,0	539
0,60	0,0023	2,0	69,1	10,0	638

(Daten aus Tabelle 5.2 in Siegel & Howell, 1992.)

Die Strahlungstransportgleichung,

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial r} = e_\lambda - a_\lambda I_\lambda$$

lautet, mit $e_\lambda = 0$, $I' + a_\lambda I_\lambda = 0$. Die allgemeine Lösung ist

$$I_\lambda = c_1 e^{-a_\lambda x},$$

mit der Randbedingung $I(x = 0) = I_0$ ist die Lösung $I_\lambda = I_0 e^{-a_\lambda x}$. (Hier steht e für die Eulersche Zahl, e_λ für den Volumens-Emissionskoefizienten.)
Die Abschwächung auf das $1/e$-fache entspricht der Bedingung $I_\lambda = I_0/e$, also $a_\lambda x = 1$, die Dämpfungslänge ist

$$x = \frac{1}{a_\lambda} = \frac{1}{2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 3{,}4 \cdot 10^3 \text{ cm} = 34 \text{ m}.$$