Beispiele zu Wärmeübertragung

H. Steinrück, C. Rudischer, T. Lindner, W. Grillhofer

September 11, 2007

Abstract

In dieser Sammlung sind ergänzende Beipiele zur LVA 319034 Wärmeübertragung enthalten. Diese Beispiele werden nicht in der LVA behandelt, stellen aber ein für die Vorbereitung auf die Tests geeignetes Übungsmaterial dar. Zu fast allen Beispielen wurden von Herrn Benedikt Nowak Lösungen erarbeitet.

Contents

1 Wärmeleitung

1.1 geschichtete Wand - 1

Berechnen Sie die Wärmestromdichte durch eine ebene Wand, die aus zwei Schichten (Dicke: Δx_1 bzw. Δx_2, Wärmeleitfähigkeit: λ_1 bzw. λ_2) besteht, bei gegebenen Oberflächentemperaturen T_0, T_2.

Lösung:

$$\dot{q} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}}.$$

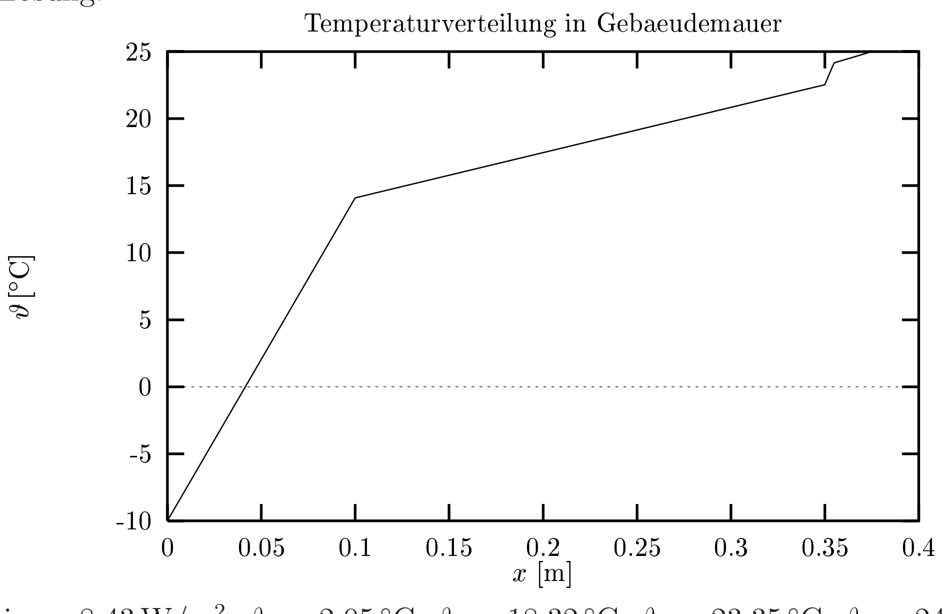
1.2 geschichtete Wand - 2

Eine Gebäudewand ist aus mehreren Schichten aufgebaut:

Schicht	Dicke [cm]	Wärmeleitfähigkeit [W/mK]
1: Isolierung	10.0	0.035
2: Ziegel	25.0	0.25
3: Luftspalt	0.5	0.026
4: Holz (innen)	2.0	0.2

Man berechne die stationäre Temperaturverteilung und die Wärmestromdichte durch die Wand. Geben Sie die Temperaturen in der Mitte der einzelnen Schichten an, und skizzieren Sie die Temperaturverteilung, wenn die Aussentemperatur $\vartheta_A = -10\,°\mathrm{C}$ und die Innentemperatur $\vartheta_I = +25\,°\mathrm{C}$ betragen.

Lösung:



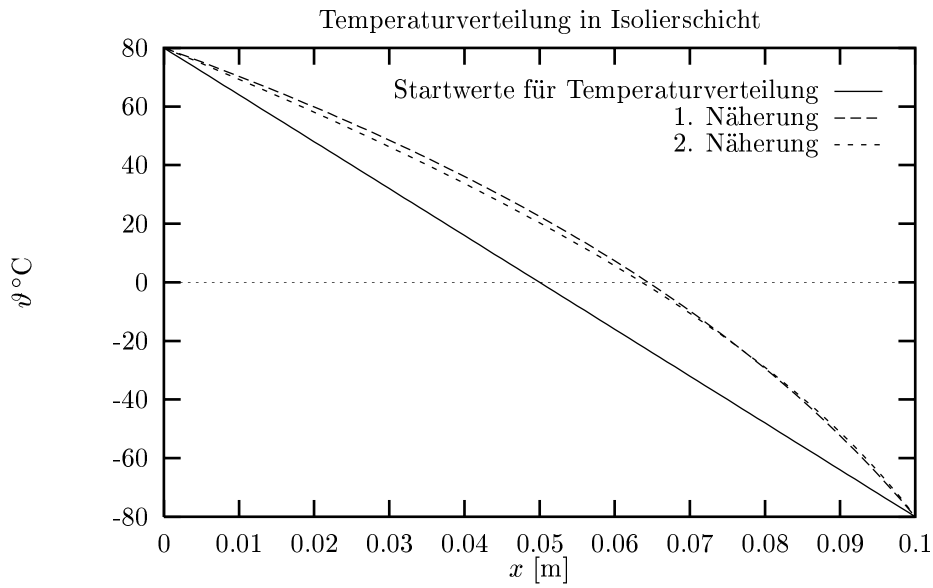
$\dot{q} = -8.43\,\mathrm{W/m^2}$, $\vartheta_1 = 2.05\,°\mathrm{C}$, $\vartheta_2 = 18.32\,°\mathrm{C}$, $\vartheta_3 = 23.35\,°\mathrm{C}$, $\vartheta_4 = 24.58\,°\mathrm{C}$.

1.3 geschichtete Wand - 3

Eine 10 cm dicke Isolierung aus Kunstharzschaum trennt einen Kühlraum mit der Temperatur $\vartheta_I = -80°C$ von einem Maschinenraum mit der Temperatur $\vartheta_M = +80°C$. Man berechne die stationäre Wärmestromdichte durch die Isolierung und die Temperaturverteilung.

$$\lambda = a + b \cdot (\vartheta - \vartheta_0), \quad a = 0.01\,\mathrm{W/mK}, \quad b = 2.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/mK^2}, \quad \vartheta_0 = -100°\mathrm{C}.$$

Hinweis:
(i) Schätzen Sie zunächst eine Temperaturverteilung,
(ii) Bestimmen Sie zur angenommenen Temperaturverteilung die Verteilung der Wärmeleitfähigkeit in der Wand.
(iii) Unterteilen Sie nun die Wand in kleine Abschnitte mit konstanter Wärmeleitfähigkeit und berechnen Sie die Wärmestromdichte und die Temperaturverteilung.
(iv) Wiederholen Sie damit die Schritte (i) und (ii), bis sich nur mehr kleine Änderungen in der Wärmestromdichte ergeben.



Anzahl der Zellen $N_x = 100$,
Näherungen für Wärmestromdichte: $q_1 = 43,04\mathrm{W/m^2}$, $q_2 = 48,23\mathrm{W/m^2}$, $q_3 = 48,10\mathrm{W/m^2}$ $q_4 = 47,98\mathrm{W/m^2}$, $q_5 = 48,00\mathrm{W/m^2}$.

Anzahl der Zellen $N_x = 5$,
Näherungen für Wärmestromdichte: $q_1 = 43,11\mathrm{W/m^2}$, $q_2 = 43,24\mathrm{W/m^2}$, $q_3 = 48,08\mathrm{W/m^2}$, $q_4 = 47,99\mathrm{W/m^2}$, $q_5 = 48,00\mathrm{W/m^2}$.

1.4 geschichteter Zylinder

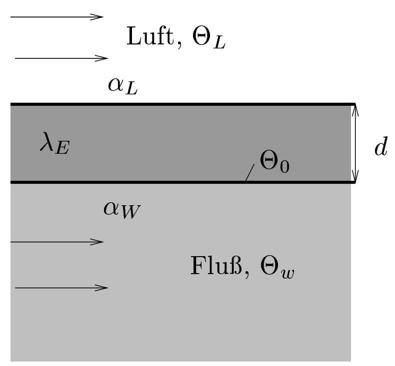
Berechnen Sie den Wärmestrom pro Länge durch den Mantel eines langen Zylinders mit Innendurchmesser $2r_0$, der aus zwei Schichten (Dicke $\Delta r_1 = r_1 - r_0$ bzw. $\Delta r_2 = r_2 - r_1$, Wärmeleitfähigkeit λ_1 bzw. λ_2) besteht, bei gegebenen Oberflächentemperaturen T_0, T_2.

$$\dot{Q} = -(T_2 - T_0)\frac{2\pi}{\frac{1}{\lambda_1}\ln(r_1/r_0) + \frac{1}{\lambda_2}\ln(r_2/r_1)}.$$

2 Bilanzen

2.1 Eisdecke

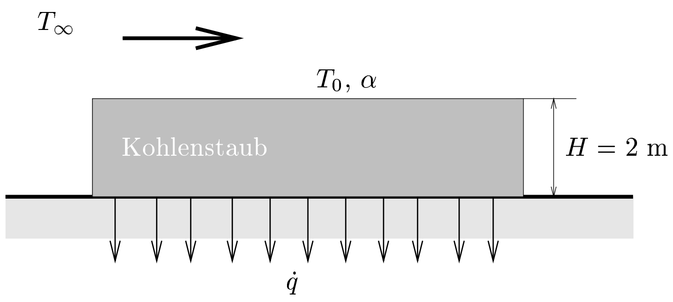
Während eines kalten Winters bildet sich auf einem Fluß eine Eisdecke unbekannter Dicke d. Bekannt sind die Temperatur des Wassers $\Theta_w = 4\,°\mathrm{C}$, die Temperatur der Luft $\Theta_L = -30\,°\mathrm{C}$, die Temperatur der Unterseite der Eisdecke $\Theta_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Die Wärmeleitfähigkeit von Eis beträgt $\lambda_E = 2,25\,\mathrm{W/mK}$. Die Wärmeübergangskoeffizienten auf der Wasser- bzw. Luftseite der Eisschicht betragen $\alpha_W = 500\,\mathrm{W/m^2K}$ bzw. $\alpha_L = 100\,\mathrm{W/m^2K}$. Berechnen Sie die Temperatur der Oberseite der Eisschicht und die Dicke der Eisdecke.



2.2 Kohlehaufen-1

Eine 2 m dicke Schicht von Kohlenstaub ist gelagert. Aufgrund von chemischen Reaktionen zwischen Kohleteilchen und Luft wird gleichmäßig über die gesamte Kohlenschicht die Reaktionswärme von $50\mathrm{W/m^3}$ frei. Die Temperatur der umgebenden Luft beträgt 30°C. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt $15\mathrm{W/m^2K}$. Die effektive Wärmeleitfähigkeit der Kohlestaubschicht beträgt 0,2 W/mK. An den Boden wird die Wärmestromdichte von $30\mathrm{W/m^2}$ abgegeben. Berechnen Sie

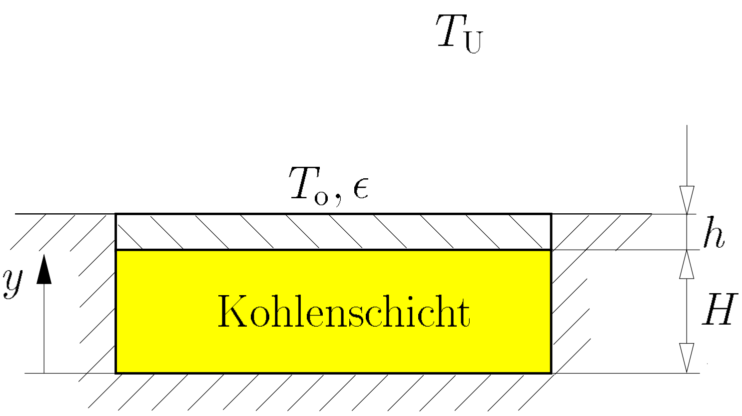
- die Temperatur T_0 der Oberseite der Kohleschicht, ($\vartheta_o = 34,67\,°\mathrm{C}$)
- die Temperaturverteilung in der Kohleschicht,
- die maximale Temperatur in der Kohleschicht $\vartheta^* = 269,67\,°\mathrm{C}$.



2.3 Kohlehaufen-2

Eine $H = 1\,\mathrm{m}$ dicke Schicht von Kohlenstaub der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_\mathrm{K} = 0,2\,\mathrm{W/mK}$ ist in ein adiabates Fundament eingebettet. Aufgrund von chemischen Reaktionen wird gleichmäßig über die gesamte Kohlenschicht die Reaktionswärme von $40\,\mathrm{W/m^3}$ frei. Über der Kohlenschicht ist eine Platte der Dicke $h = 10\,\mathrm{cm}$ und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_\mathrm{P} = 81\,\mathrm{W/mK}$ angeordnet, welche Wärme mit der Umgebung der Temperatur $T_\mathrm{U} = 300\,\mathrm{K}$ nur durch Strahlung an ihrer Oberfläche austauschen möge. Berechnen Sie, wenn die Platte als grauer Strahler ($\epsilon = 0,4$) und die Umgebung als schwarzer Strahler angesehen werden können,

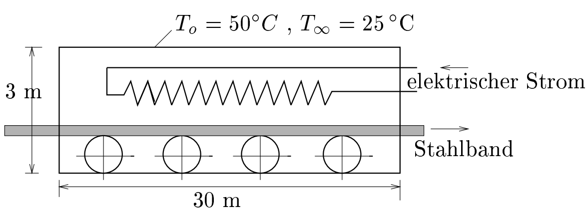
a) die Temperatur T_o der Plattenoberseite ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$) (3 Punkte),
b) die Temperatur $T(y = H)$ an der Kontaktstelle Platte-Kohlenschicht (2 Punkte) sowie
c) die Temperaturverteilung $T(y)$ in der Kohlenschicht. Skizzieren Sie den Temperaturverlauf in Kohlenschicht und Platte qualitativ. (5 Punkte)



.

2.4 Erwärmung eines Metallbandes

Ein elektrischer Ofen zur wird zur Erwärmung eines kontinuierlichen Metallbandes von der Umgebungstempertur $\vartheta = 25\,^\circ\mathrm{C}$ auf $\vartheta_A = 1000\,^\circ\mathrm{C}$ verwendet. Der Ofen ist 30m lang. Die Bandgeschwindigkeit ist so, daß jedes Bandteilchen zwei Stunden im Ofen verweilt. Die Banddicke beträgt 1 cm, die Temperatur der umgebenden Luft 25°C. Die Oberflächentemperatur des Ofens beträgt 50°C. Der Wärmeübergangskoeffizient Luft/Ofen beträgt 20W/m^{2}K. Die Wärmekapazität des Metallbandes beträgt 700J/kgK und die Dichte 7200kg/m^3. Berechnen Sie die elektrische Leistung des Ofens pro Breiteneinheit! ($P = 219,75\,\mathrm{kW/m}$)



2.5 Heizstab

Eine einfache elektrische Heizung besteht aus einem freiliegenden, kreiszylinderförmigen Heizstab (Nickel - Legierung), der horizontal angeordnet ist, sowie einem Ventilator zur besseren Wärmeabfuhr. Der Hersteller des Gerätes gibt an, daß durch den Heizstab bei einer Spannung von 220 Volt ein Strom von 2.5 Ampere fließt. Außerdem ist auf dem Gerät vermerkt, daß die Oberflächentemperatur des Heizstabes bei einer Raumtemperatur von $\vartheta_r = 20°C$ unter normalen Betriebsbedingungen $\vartheta = 230°C$ beträgt.

a) Berechnen Sie die Temperaturverteilung im Heizstab, wenn dieser einen Durchmesser $d = 1cm$ und eine Länge $L = 5dm$ hat. Wie groß ist die mittlere Temperatur T_m des Heizstabes? Die Wärmeleitfähigkeit für die verwendete Nickel - Legierung beträgt $\lambda_s = 26W/mK$.

b) Wird der Großteil der Wärme durch Strahlung (schwarzer Körper) oder durch erzwungene Konvektion übertragen? Wie groß ist die Nusselt Zahl? $\lambda_{\text{Luft}} = 0.026W/mk$, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/mK^4$.

c) Durch einen Defekt fällt der Ventilator aus. Welche Oberflächentemperatur stellt sich dann ein, wenn die Nusselt Zahl für natürliche Konvektion $Nu = 3$ beträgt?

3 Konvektion

3.1 Couette Strömung

3.1.1 Lager-1

In einem hohlen Zylinder (Außenradius R_A, Innenradius R_I, Stahl) rotiert ein zweiter koaxialer Zylinder (Radius R_k) mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Im Spalt zwischen den beiden Zylindern befinde sich Öl (dynamische Viskosität μ, Dichte ρ, spezifische Wärmekapaziät c_p).

Berechnen Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit, sodaß der Temperaturunterschied zwischen dem inneren Zylinder und der Außenseite des äußeren Zylinders im stationären Betrieb kleiner als $\Delta T = 5\text{K}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie $d = R_I - R_k << R_I$ und $s = R_A - R_I << R_I$.

$$R_K = 5.0\text{cm} \quad d = 5\text{mm} \quad s = 1\text{cm} \quad \lambda_{Oel} = 0.6\text{W/mK}, \quad \mu = 0.4\text{kg/ms}$$

$$\lambda_{Stahl} = 60\text{W/mK}$$

3.1.2 Lager-2

In einem hohlen Zylinder (Innenradius $R_2 = 5\,\text{cm}$, Außenradius $R_3 = 6\,\text{cm}$) aus Stahl (Wärmeleitfähigkeit $\lambda_s = 35\,\text{W/mK}$) rotiert ein zweiter koaxialer Zylinder (Radius $R_1 = 4,7\,\text{cm}$) mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 50\text{s}^{-1}$. Der Spalt zwischen den beiden Zylindern ist mit Öl (dynamische Viskosität $\mu = 0,4\,\text{Pa.s}$, Dichte $\rho = 800\,\text{kg/m}^3$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{Öl}} = 0,6\,\text{W/mK}$) gefüllt. Die Temperatur an der Außenseite des äußeren Zylinders beträgt $\vartheta_3 = 32\,°\text{C}$.

a) Welche Strömungsform liegt vor?
(Die Couette Strömung ist stabil, falls $Re = \frac{ud}{\nu} < 41.3\sqrt{\frac{R}{d}}$ mit $R = (R_1 + R_2)/2$, $d = R_2 - R_1$ gilt.) ($Re = 14,1 < Re_{\text{krit}} = 166$)

b) Geben Sie das Geschwindigkeitsprofil an!

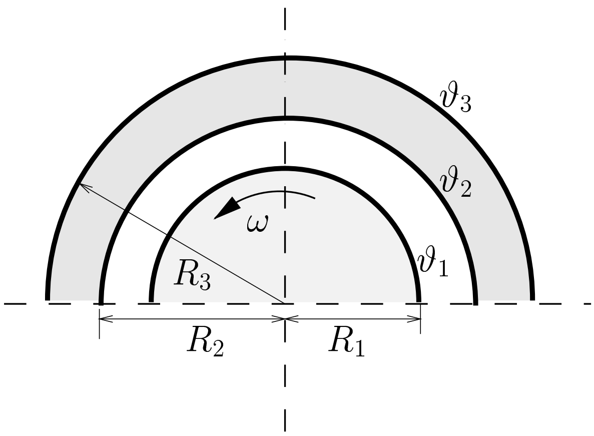
c) Berechnen Sie die Dissipation! ($\phi = 245\text{kW/m}^3$)

d) Berechnen Sie die Wärmestromdichte bei $R = R_2$! ($\dot{q}_2 = 736\,\text{W/m}^2$)

e) Berechnen Sie die Temperatur des inneren Zylinders. ($\vartheta_1 = 34,03\,°\text{C}$)

f) Berechnen Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max}$, sodaß die Temperatur des inneren Zylinders 60 °C nicht übersteigt. ($\omega = 185,7\,\text{s}^{-1}$)

g) Bei welcher Winkelgeschwindigkeit wird die Couette Strömung instabil? Wie groß ist in diesem Fall die Temperatur des inneren Zylinders? ($\omega = 588,9\,\text{s}^{-1}$, $\vartheta_1 = 314\,°\text{C}$)



3.1.3 Lager-3

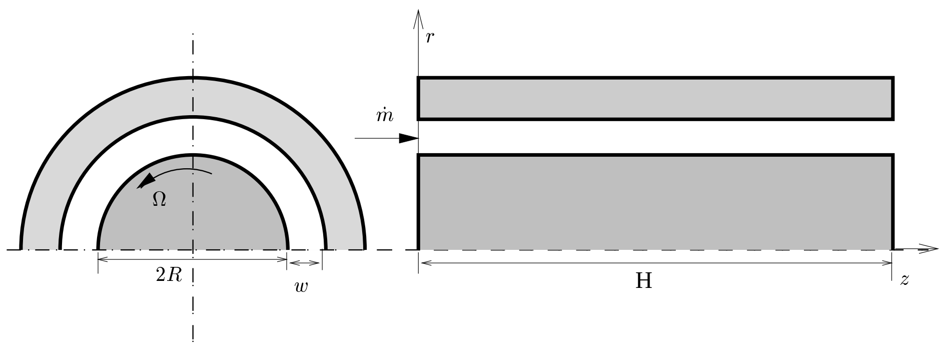
In einem hohlen Zylinder (Höhe H, Innenradius $R_i = R+w$) rotiert ein zweiter koaxialer Zylinder (Höhe H, Radius R) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Der Spalt (Breite w) zwischen den beiden Zylindern wird von Öl (Viskosität ν, Dichte ρ, Wärmekapazität c_p) durchströmt. Man berechne, wieviel das Öl beim Durchgang durch den Spalt erwärmt wird, wenn die Komponente $\dot{m}_z$ des Massenstrom an Öl parallel zur Zylinderachse gegeben ist, und in beiden Zylindern Wärmeleitung vernachlässigbar ist.

$$H = 50\,cm, \quad R = 10\,cm, \quad w = 0,5\,cm,$$

$$\nu = 2,0 \times 10^{-4}\,m^2/s, \quad \rho = 804\,kg/m^3, \quad \lambda = 0,34\,W/mK, \quad c_p = 2,1\,kJ/kgK,$$

$$\dot{m}_z = 0,13\,kg/s, \quad \Omega = 75\,s^{-1}.$$

Vereinfachungen:
i) Der Spalt kann als dünn im Vergleich zum Zylinderradius angesehen werden.
ii) Die Umfangsgeschwindigkeit des inneren Zylinders ist wesentlich größer als die mittlere Geschwindigkeit des Öls in der z-Richtung.



Gehen Sie wie folgt vor:
a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der azimutalen Komponente u_θ. (2 Punkte)
b) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der axialen Komponente u_z. (2 Punkte)
c) Berechnen Sie die Dissipation. (1 Punkt)

d) Stellen Sie die Energiebilanz für einen Zylinderquerschnitt auf. (2 Punkte)
e) Berechnen Sie den Temperaturunterschied des Öls zwischen dem Ein- und Ausströmen aus dem Spalt. (1 Punkt)
f) Stellen Sie die Energiegleichung für die Temperaturverteilung im Spalt auf. (mit Randbedingungen!, Die Lösung der Energiegleichung ist nicht erforderlich!) (2 Punkte)

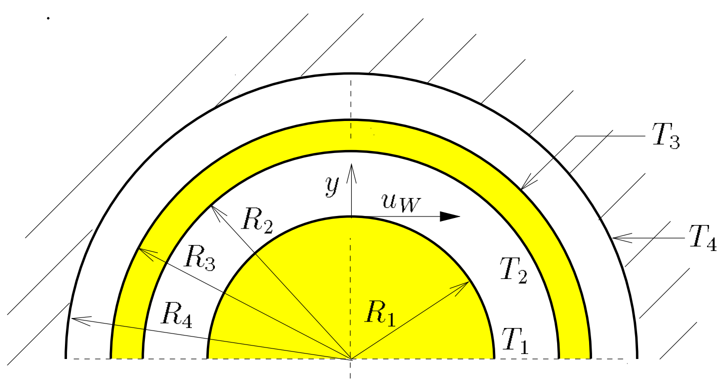
3.1.4 Lager-4

In einem hohlen Zylinder aus Stahl mit Innenradius $R_2 = 50\,\mathrm{mm}$, Außenradius $R_3 = 53\,\mathrm{mm}$ und der Wärmeleitfähigkeit λ_{S} rotiert stationär ein zweiter koaxialer Zylinder mit Radius $R_1 = 48\,\mathrm{mm}$ mit einer Umfangsgeschwindigkeit u_{W}. Der Spalt zwischen den Zylindern ist mit Öl (dynamische Viskosität μ, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{Öl}}$) gefüllt. Der hohle Zylinder befindet sich in einem zylindrischen Hohlraum (Innenradius $R_4 = 70\,\mathrm{mm}$) der gegebenen Temperatur $T_4 = 320\,\mathrm{K}$; Wärme soll zwischen diesen beiden Körpern nur aufgrund von Strahlung ausgetauscht werden, wobei der hohle Zylinder wie ein grauer Strahler ($\epsilon = 0,3$) und der zylindrische Hohlraum wie ein schwarzer Körper strahlen mögen.

1. Zeichnen Sie das Geschwindigkeitsprofil in die Skizze ein und ermitteln Sie den Temperaturverlauf im Öl ($0 \le y \le R_2 - R_1$) in Abhängigkeit von T_1 und T_2 mittels einer Energiebilanz. (Nullpunkt der y-Achse bei $r = R_1$) (4 Punkte)
2. Berechnen Sie die Wärmestromdichte an der Stelle $y = R_2 - R_1$. (2 Punkte)
3. Berechnen Sie T_3. (2 Punkte)
4. Berechnen Sie T_2 und T_1. (2 Punkte)

$$\lambda_{\mathrm{S}} = 35\,\mathrm{W/mK}, \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}, \quad u_{\mathrm{W}} = 1\,\mathrm{m/s},$$

$$\lambda_{\text{Öl}} = 0,6\,\mathrm{W/mK}, \quad \mu = 0,4\,\mathrm{Pa\,s}$$



3.2 Poiseuilleströmung

3.2.1 Türspalt

Eine geschlossene Tür trennt zwei Wohnräume unterschiedlicher Temperatur. Unter und oberhalb des Türblattes bleibt jeweils ein Spalt der Breite d, durch den Luft zwischen den beiden Räumen ausgetauscht werden kann. Der Druck sei in beiden Räumen in der mittleren Höhe ($y = H/2$) gleich. Die Duckverteilung ist in beiden Räumen hydrostatisch: $p_i(y) = p_o(H/2) - \rho_i g(y - H/2)$.

- Berechnen Sie $p_1(0) - p_2(0)$, bzw. $p_2(H) - p_1(H)$.
- Geben Sie das Geschwindigkeitsprofil in einem Luftspalt an. (Nehmen Sie die Strömung als vollausgebildete laminare Kanalströmung an).
- Berechnen Sie den Massenstrom durch einen Spalt.
- Wie groß ist der konvektive Wärmeaustausch zwischen den beiden Räumen?
- Berechnen Sie den Wärmeaustausch zwischen den beiden Räumen aufgrund von Wärmeleitung durch das Türblatt. ($\lambda_{\text{Holz}} = 0,2\,\text{W/mK}$)

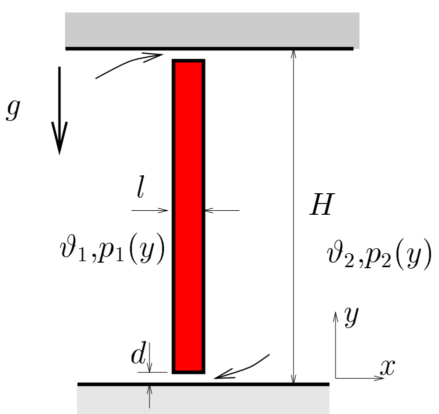
$$\vartheta_1 = 30\,°\text{C}, \quad \vartheta_2 = 20\,°\text{C},$$

Daten für Luft bei $\vartheta = 25\,°\text{C}$:

$$\rho_{\text{Luft}} = 1,170\,\text{kg/m}^3, \quad \nu_{\text{Luft}} = 1,5 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \quad c_{p,\text{Luft}} = 1,006\,\text{kJ/kg K},$$

$$d = 0,5\,\text{cm}, \quad H = 2,1\,\text{m}, \quad w = 0,9\,\text{m}, \quad L = 5\,\text{cm}.$$

.



3.2.2 Sonnenkollektor 1

Der Volumenstron $\dot{V} = 0,1\,\mathrm{l/s}$ strömt zwischen zwei parallelen Platten (Breite $b = 0,8\,\mathrm{m}$, Länge $h = 1,2\,\mathrm{m}$, Abstand $d = 1\,\mathrm{cm}$). Eine der beiden Platten sei adiabat, die andere ein idealer Wärmeleiter mit schwarzer Oberfläche. Die schwarze Platte wird von der Sonne ($\dot{q}_r = 1,4\,kW/m^2$) unter einem Winkel ($\varphi = 60°$) bestrahlt. Die Einströmtemperatur des Wassers beträgt $T_1 = 300\,K$.

a) Berechnen Sie den von der schwarzen Platte absorbierten und emittierten Wärmestrom.

b) Welche Strömungsform liegt vor?

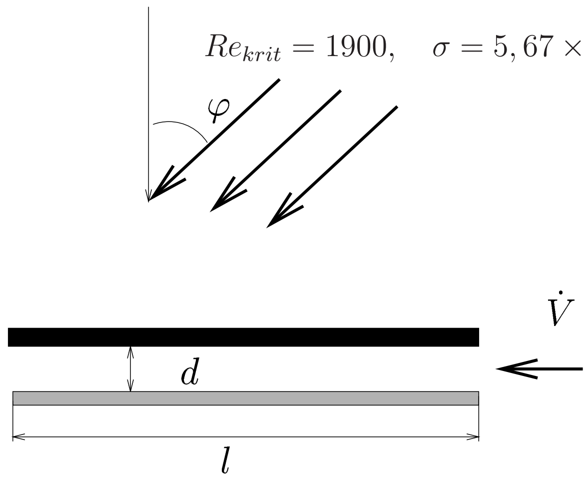
c) Wie lautet die Geschwindigkeitsverteilung ? (Skizze!)

c) Wie lautet die Temperaturverteilung? (Skizze!)

d) Berechnen Sie die Mischtemperatur am Austritt.

$$\rho = 995,7\,kg/m^3, \quad \lambda = 0,61\,W/mK, \quad c_p = 4,18\,kJ/kgK, \quad \nu = 10^{-6}\,m^2/s,$$

$$Re_{krit} = 1900, \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8}\,W/m^2K^4.$$



3.2.3 Sonnenkollektor 2

Zwischen zwei parallelen Platten (Breite $b = 0,8\,\mathrm{m}$, Länge $l = 6,0\,\mathrm{m}$, Abstand $d = 0,2\,\mathrm{cm}$) strömt Wasser. Die unter Platte sei adiabat, die obere Platte ist aus Aluminium und wird von der Sonne ($\dot{q}_r = 1,4\,\mathrm{kW/m^2}$) unter einem Winkel ($\varphi = 60°$) bestrahlt. Die Einströmtemperatur des Wassers beträgt $\vartheta_1 = 15\,°\mathrm{C}$.

a) Berechnen Sie den von der schwarzen Platte absorbierten und emittierten Wärmestrom. (Hinweis: zur Berechnung des emittierten Wärmestromes kann die Platte als isotherm angesehen werden. Als Plattentemperatur nehmen sie die Einströmtemperatur des Wassers an!)

b) Berechnen Sie mittels einer Energiebilanz, wie groß der Massenstrom $\dot{m}$ an Wasser sein muß, damit die Austrittstemperatur $\vartheta_2 = 30\,°\mathrm{C}$ beträgt.

c) Welche Strömungsform liegt vor?

d) Wie lautet die Geschwindigkeitsverteilung ? (Skizze!)

e) Wie lautet die Temperaturverteilung? (Skizze!)

f) Ein leichter Wind $U_w = 0.1\,\mathrm{m/s}$ bläst über den Sonnenkollektor. Berechnen Sie für diesen Fall die Mischtemperatur am Austritt, wenn der gleiche Massenstrom, wie bei b) durch den Sonnenkollektor fließt.

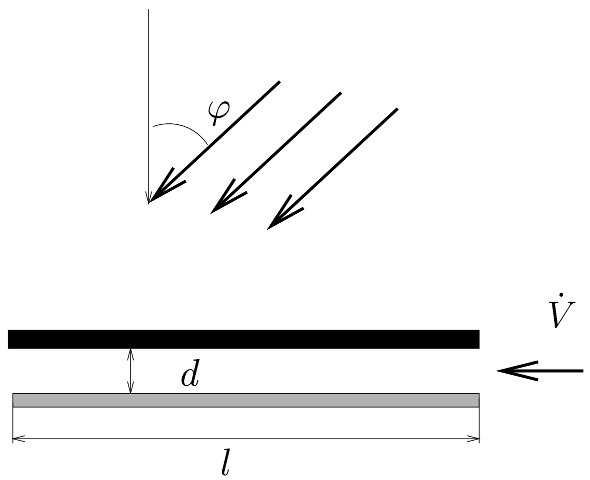
$$\rho = 995{,}7\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \lambda = 0{,}61\,\mathrm{W/mK}, \quad c_p = 4{,}18\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad \nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s},$$

$$Re_{\mathrm{krit,Spalt}} = 1900, \quad \sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}.$$

$$\varepsilon_{Al} = 0{,}05, \quad \alpha_{Al} = 0{,}3$$

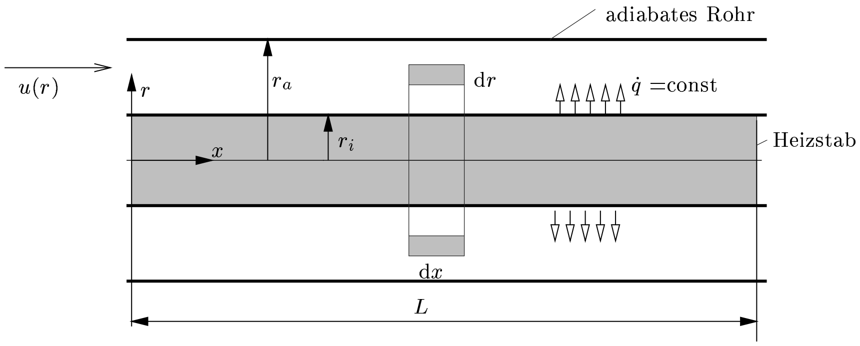
Wärmeübergeng bei erzwungener Konvektion an einer laminaren Grenzschicht:

$$Nu_x = 0{,}33\sqrt{Re_x}$$



3.3 laminare Rohrströmung

3.3.1 Heizstab



In einem von einer Newtonschen Flüssigkeit durchströmten Zylinderrohr befindet sich ein koaxialer Heizstab, der eine auf die Heizfläche bezogene, konstante Heizleistung q abgibt. Berechnen Sie für das gegebene Rohr die Geschwindigkeitsverteilung $u(r)$ für eine vollausgebildete laminare, stationäre Strömung.
Berechnen Sie den Massenstrom $\dot{m}$. Berechnen Sie die Differenz der Mischtemperaturen zwischen dem Rohreinritt und Rohraustritt.
Hinweis: Beginnen Sie mit einer Kräftebilanz für das eingezeichnete, achsensymmetrische Volumenteilchen!

3.4 turbulente Rohrströmung

3.4.1 Bsp 1

In eine 15m lange horizontale Heißwasserleitung (Rohrdurchmesser innen $d = 14\,\text{mm}$) fließt Wasser bei einer mittleren Temperatur von $\vartheta = 60\,°\text{C}$ ein. Das Leitungsrohr ist aus Stahl ($\lambda_{\text{Stahl}} = 58\text{W/mK}$, Wandstärke $s = 1,3\text{mm}$) und liegt frei im Raum Umgebungstemperatur ($\vartheta_u = 10\,°\text{C}$.

a) Ist die Strömung laminar oder turbulent?

b) Wie groß ist die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit an die umgebende Luft abgegeben wird?

c) Wie groß ist die mittlere Temperatur am Rohraustritt?

d) Wie groß ist der Druckabfall in der Leitung?

$$c_{\text{p,Wasser}} = 4,18\text{kJ/kg K}, \quad \rho_{\text{Wasser}} = 999\text{kg/m}^3, \quad \nu_{\text{Wasser}} = 0,6\times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}, \quad \dot{V} = 0,150\text{l/s},$$

$$Nu = 12,0 \quad \text{(freie Konvektion um horizontalen Zylinder)}, \quad \lambda_{\text{Luft}} = 0,027\text{W/mK}$$

Reynold'sche Analogie:

$$St = \frac{1}{Pr_t}\frac{\lambda_R}{8}, \quad Pr_t \sim 0,9.$$

Widerstandszahl λ_R einer Rohrströmung:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda_R}{d}\frac{\rho u^2}{2}.$$

Für glatte Rohre gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = 2,0\log_{10}(Re\sqrt{\lambda_R}) - 0,8.$$

3.4.2 Bsp 2

Der Druckunterschied zwischen den Enden einer L=20m langen Heißwasserleitung (Durchmesser d=3cm) beträgt $\Delta p = 0.15$bar. Das Rohr ist mit einer $s = 1.5$cm dicken Isolierschicht ($\lambda_{Isolier} = 0.13 W/mK$) ummantelt.

Die Einlauftemperatur beträgt $\vartheta = 60°$C. Man berechne die Temperatur des Wassers am Ende Rohrleitung unter folgenden Voraussetzungen:
(a) Die Temperatur an der Außenseite der Isolierschicht sei konstant auf $\vartheta = 0°$C gehalten.
(b) Die Wandstärke des Rohres sei vernachlässigbar klein.
(c) Es handelt sich um eine voll ausgebildete turbulente Rohrströmung.

Formelsammlung:

$$\text{Wärmeleitung durch einen Zylindermantel: } r\dot{q} = \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{\ln(r_1/r_0)}$$

$$\text{Reynoldssche Analogie: } St = \lambda_R/8$$

$$\text{Prandtl Nikuradse Formel für } \lambda_R\text{:} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = 2.0\log_{10}(Re\sqrt{\lambda_R}) - 0.8$$

$$\lambda_R = \frac{\Delta p}{L}\frac{d}{\frac{\rho}{2}u^2}$$

Gehen Sie wie folgt vor:
(i) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit (3 Punkte)
(ii) Vergewissern Sie sich, daß die Strömung turbulent ist (1 Punkt).
(iii) Berechnen Sie λ_R (1 Punkt).
(iv) Berechnen Sie die mittlere Wärmestromdichte an der Außenseite der Isolierschicht. (3 Punkte).
(v) Berechnen Sie die Austrittstemperatur des Wassers (2 Punkte).

Stoffwerte:

$$\nu_{\mathrm{H_2O}} = 0.6 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}, \quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 998\mathrm{kg/m^3}, \quad c_p = 4.2\mathrm{kJ/kgK}, \quad \lambda_{rmIso} = 0.13\mathrm{W/mK}.$$

3.4.3 Bsp 3

Durch ein Rohr der Länge $L = 50\,$m mit Innendurchmesser $d = 20\,$mm fließt ein Volumenstrom $\dot{V} = 0,1\,\mathrm{dm^3/s}$. Die Einlauftemperatur beträgt $\vartheta_E = 30\,°$C, die Austrittstemperatur $\vartheta_A = 28\,°$C. Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie ihre Ergebnisse in die Kästchen ein:

a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit im Rohr.

b) Berechnen Sie die Reynolds-Zahl.

c) Ist die Rohrströmung laminar oder turbulent?

d) Bestimmen Sie die Stanton-Zahl.

e) Berechnen Sie die mittlere Wärmestromdichte an der Rohrwand.

f) Bestimmen Sie die Differenz zwischen Mischtemperatur und Wandtemperatur.

$$St = \frac{\dot{q}}{u_m c_p \rho \Delta T} = \frac{\lambda_r}{8 Pr_t}, \quad Pr_t = 0,9, \quad \text{turbulente Strömung,}$$

$$Nu = 4,36, \quad \text{laminare Rohrströmung,}$$

$$\lambda = 0,64 \quad \mathrm{W/mK}, \quad c_p = 4,178\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad \rho = 999\,\mathrm{kg/m^3} \quad \nu = 0,6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}.$$

3.4.4 Bsp 4

Wasser soll beim Durchströmen eines glatten Rohres mit dem Durchmesser $d = 3\,\mathrm{cm}$ und der Länge $L = 100\,\mathrm{m}$ von $\vartheta_{\text{ein}} = 20\,°\mathrm{C}$ auf $\vartheta_{\text{aus}} = 30\,°\mathrm{C}$ erwärmt werden. Die Wärmestromdichte an der Innenseite des Rohres sei überall gleich und betrage $\dot{q} = 1\,\mathrm{kW/m^2}$.

a) Bestimmen Sie den Massenstrom durch das Rohr.

b) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.

c) Berechnen Sie die Reynolds-Zahl. Ist die Rohrströmung laminar oder turbulent?

d) Bestimmen Sie den Druckunterschied zwischen Anfang und Ende des Rohres.

e) Bestimmen Sie die Differenz zwischen Mischtemperatur und Wandtemperatur.

$$\mathrm{St} = \frac{\dot{q}}{u_m c_p \rho \Delta T} = \frac{\lambda_r}{8\mathrm{Pr}_t}, \quad \lambda_r = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{2d}{\rho u^2}, \quad \mathrm{Pr}_t = 0,9,$$

$$\lambda = 0,64 \quad \mathrm{W/mK}, \quad c_p = 4,178\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad \rho = 999\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \nu = 0,6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}.$$

3.4.5 Bsp 5

Der Druckunterschied zwischen den Enden einer $L = 20\,\mathrm{m}$ langen Heißwasserleitung (Durchmesser d=3 cm) beträgt Δp =0,15 bar. Das Rohr ist mit einer s =1,5 cm dicken Isolierschicht ummantelt.

Die Einlauftemperatur beträgt $\vartheta_{\mathrm{ein}} = 60\,°\mathrm{C}$. Man berechne die Temperatur des Wassers am Ende der Rohrleitung unter folgenden Voraussetzungen:
(a) Die Temperatur an der Außenseite der Isolierschicht sei konstant auf $\vartheta = 0°\mathrm{C}$ gehalten.
(b) Die Wandstärke des Rohres sei vernachlässigbar klein.
(c) Es handelt sich um eine voll ausgebildete turbulente Rohrströmung.
(d) Die Rohrinnenwand ist glatt.
Formelsammlung:

$$\text{Wärmeleitung durch einen Zylindermantel: } r\dot{q} = \frac{\lambda(T_0 - T_1)}{\ln(r_1/r_0)}$$

$$\text{Reynoldssche Analogie: } St = \frac{\lambda_R}{8 \cdot Pr_t}, \quad \lambda_R = \frac{\Delta p}{L}\frac{d}{\frac{\varrho}{2}u^2}, \quad Pr_t \sim 0{,}9$$

Rohrwiderstandszahl λ_R für glatte Rohre nach Prandtl-Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} = 2 \cdot \log_{10}(Re\sqrt{\lambda_R}) - 0{,}8$$

Gehen Sie wie folgt vor:
(i) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ und den Massenstrom $\dot{m}$ an Wasser (iterativ).
(ii) Vergewissern Sie sich, daß die Strömung turbulent ist.
(iii) Berechnen Sie die mittlere Wärmestromdichte $\dot{q}_a$ an der Außenseite der Isolierschicht.
(iv) Berechnen Sie die Austrittstemperatur ϑ_{aus} des Wassers.

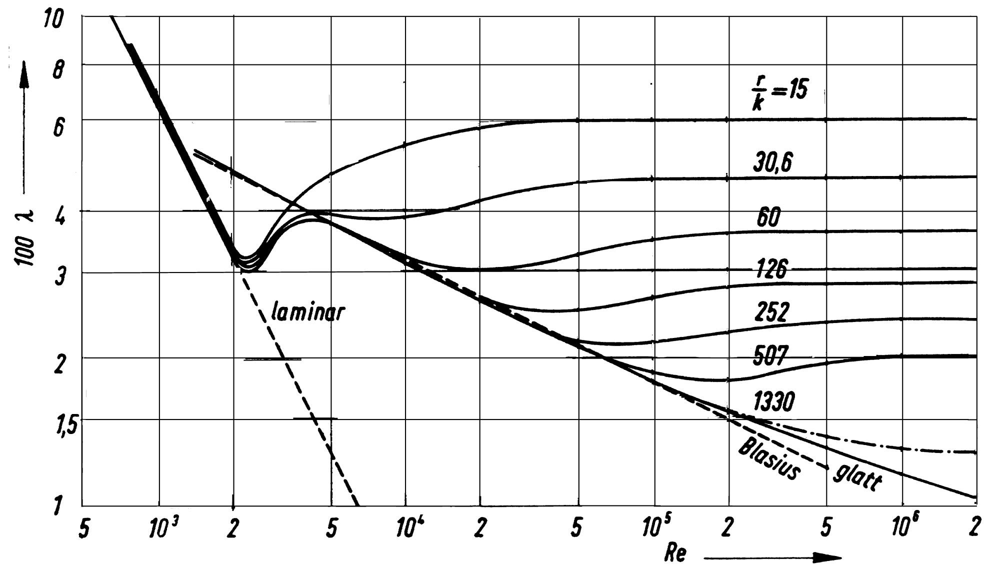


Bild 4.51 Widerstandszahl λ von rauhen Rohren; abhängig von der *Reynolds*schen Zahl, nach *Nikuradse* (ausgezogen) und *Bauer* und *Galavics* (strichpunktiert)

Lösung:

$$\dot{q_w} = \frac{\vartheta_M - \vartheta_U}{\frac{1}{\rho \cdot c_p \cdot u \cdot St} + \frac{d}{2\lambda_{is}} \ln(1 + 2s/d)} \tag{1}$$

$$\frac{d\vartheta_m}{dx} = \frac{4}{d} \frac{\vartheta_M - \vartheta_u}{\frac{1}{St} + \frac{\rho c_p u d}{2\lambda_{is}} \ln(1 + 2s/d)} \tag{2}$$

$$\vartheta_M(x) = \vartheta_u + (\vartheta_{ein} - \vartheta_u) e^{-x/L_0}, \quad L_0 = \frac{d}{4} \left(\frac{1}{St} + \frac{\rho c_p u d}{2\lambda_{is}} \ln(1 + 2s/d) \right) \tag{3}$$

3.5 Grenzschichten - erzwungene Konvektion

3.5.1 bestrahlte angeströmte Platte - 1

Eine dünne Platte (Länge $L = 50\,\text{cm}$, Breite $B = 50\,\text{cm}$, $\bar{\alpha}(6000\,\text{K}) = 0.8$, $\bar{\alpha}(300\,\text{K}) = 0.4$) wird von der Sonne $\dot{q}_R = 1.4\,\text{kW/m}^2$ unter einem Winkel von $\varphi = 30°$ bestrahlt. Zur Kühlung wird die Platte mit einem Gas (**Pr=1**, $\lambda = 0.05\,\text{W/mK}$, $\nu = 1.8 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$) der Temperatur $T_\infty = 270\,\text{K}$ parallel zu ihrer Mittenebene mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmt.
Annahme: Die Platte habe überall dieselbe Temperatur $T_p = 300\text{K}$.

a) Berechnen Sie den von der Platte absorbierten und emittierten Wärmestrom.

b) Die Strömung über der Platte sei durch eine laminare Plattengrenzschicht gegeben:

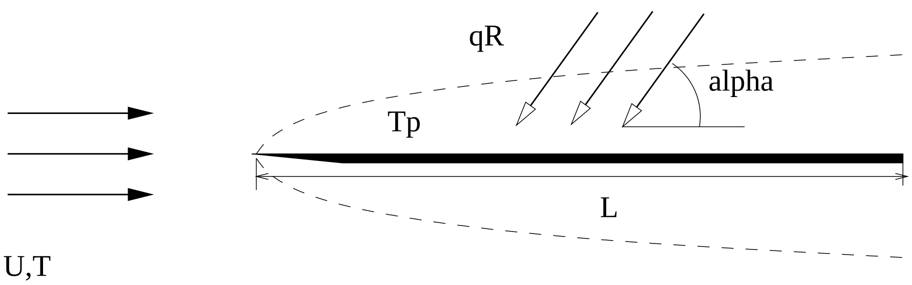
$$u(x,y) = U_\infty f_B'(\eta), \quad \eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

wobei $f_B(\eta)$ die Blasius - Funktion ist. Geben Sie die Temperaturverteilung in der Grenzschicht an.

c) Berechen Sie den Wärmeübergang durch erzwungene Konvektion. ($f_B''(0) = 0.332$)

d) Wie groß muß die Anströmgeschwindigkeit gewählt werden, damit die Plattentemperatur $T_p = 300\,\text{K}$ beträgt?

e) Überprüfen Sie, ob die Strömung tatsächlich laminar bleibt.



3.5.2 bestrahlte angeströmte Platte - 2

Eine Aluminiumplatte (Länge l, Breite b, Dicke d) wird von der Sonne unter einem Winkel φ bestrahlt. Die Platte wird parallel zu ihrer Mittenebene in Längsrichtung von Luft mit der Geschwindigkeit U_∞ und der Temperatur ϑ_∞ angeströmt. Die Platte habe die Anfangstemperatur $\vartheta_{p,0}$.

$$l = 10\,cm, \quad b = 10\,cm, \quad d = 0,2\,cm, \quad c_p = 0,883\,kJ/kgK, \quad \rho = 2787\,kg/m^3, \quad \vartheta_{p,0} = 25\,°C$$

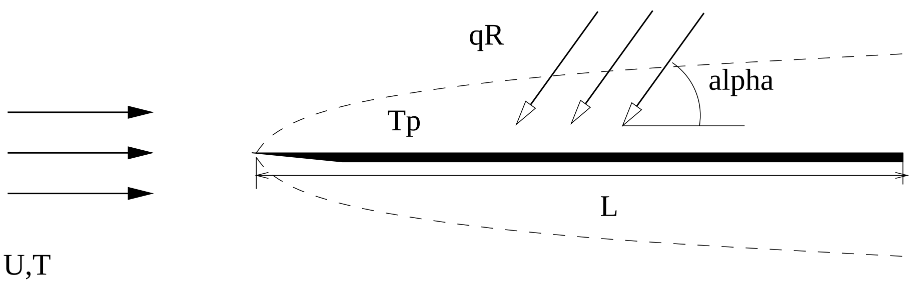
$$U_\infty = 1,2 m/s, \quad \vartheta_\infty = 15\,°C, \quad \lambda = 0,027\,W/mK, \quad \nu = 2,5 \times 10^{-5}\,m^2/s,$$

$$\dot{q}_r = 1,4\,kW/m^2, \quad \varphi = 60\,°, \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8}\,W/mK^4,$$

$$Nu_x = 0,332\sqrt{Re_x},$$

T_q [K]	300	400	...	4000	6000
α	0,05	0,06	...	0,25	0,3

Abhängigkeit des Absorptionsvermögens
von der Temperatur der Strahlungsquelle.



a) Geben Sie den von der Platte absorbierten Wärmestrom an. (1 Punkt)
b) Geben Sie den von der Platte emittierten Wärmestrom an. (2 Punkte)
c) Berechnen Sie die Reynoldszahl. Ist die Strömung laminar oder turbulent? (2 Punkte)
d) Berechnen Sie den Wärmeübergang aufgrund von Konvektion. (2 Punkte)
e) Nach welcher Zeit hat sich die Plattentemperatur um 1 Kelvin geändert? (2 Punkte)
f) Bei welcher Anströmgeschwindigkeit bleibt die Plattentemperatur gleich? (1 Punkt)

3.5.3 Stahlbramme

Eine Stahlbramme ($l = 10\,m$, $d = 0,2\,m$, $b = 1\,m$) verläßt mit einer Oberflächentemperatur ($\vartheta = 1000°$ C) das Stahlwerk und wird im Freien gelagert. Man schätze den Wärmeübergang an der Oberseite der Bramme ab.
Bestimmen Sie den Wärmeübergang aufgrund von

- Strahlung, (Die Bramme kann als schwarzer Körper angenommen werden)

- erzwungener Konvektion. (Es bläst ein Wind mit $u = 10$ m/s und $\vartheta_l = -10\,°$ C in Querrichtung über die Bramme.)

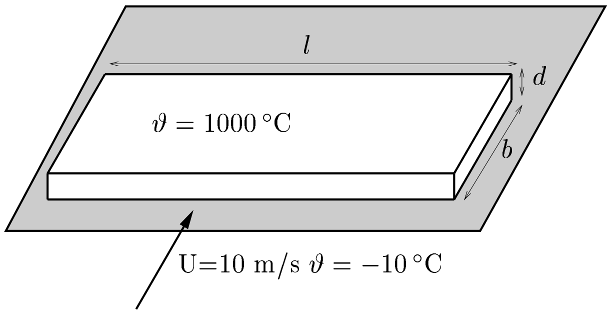
Wie lange dauert es, bis die Bramme um 50 °C abgekühlt ist?

$$Nu_x = 0,332\,Re_x^{1/2}, \quad \text{erzwungene Konvektion}$$

$$\nu_{Luft} = 1,5 \times 10^{-5}\,m^2/s, \quad \lambda_{Luft} = 0,027\,W/mK,$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\,W/m^2K^4$$

$$c_{p,Stahl} = 700\,J/kgK, \quad \rho_{Stahl} = 7200\,kg/m^3.$$



3.6 Grenzschichten - natürliche Konvektion

3.6.1 Hohlraum - 1

Zwei gegenüberliegende senkrechte Seitenwände (A,B) eines quaderförmigen Hohlraums haben die konstanten Temperaturen $\vartheta_A = 60°C$ bzw. $\vartheta_B = 20°C$. Die übrigen Seitenwände und die Grund- und Deckfläche seien adiabat.

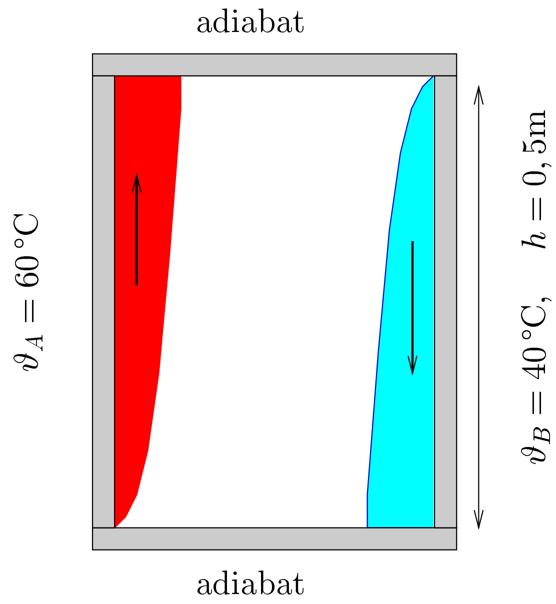
Man berechne den Wärmeübergang von Wand A auf Wand B. Man nehme dazu an, daß sich entlang der senkrechten Wände auftriebserzeugte Konvektionsgrenzschichten ausbilden und sich im Inneren des Hohlraumes die Temperatur $(\vartheta_A + \vartheta_B)/2$ einstellt.

Wie ändert sich der Wärmeübergang, wenn der Hohlraum durch eine waagrechte adiabate dünne Platte in halber Höhe in zwei Kammern unterteilt wird?

$$h = 0,5\,m \quad b = 0,4\,m, \quad d = 0,2\,m.$$

$$\mathrm{Nu}_x = 0,4.\,\mathrm{Gr}_x^{1/4},$$

$$\nu = 2,5 \times 10^{-5}\,m^2/s, \quad \lambda_l = 0,027\,W/mK, \quad c_p = 716,3\,J/kgK, \quad \rho_l = 1,29\,kg/m^3$$



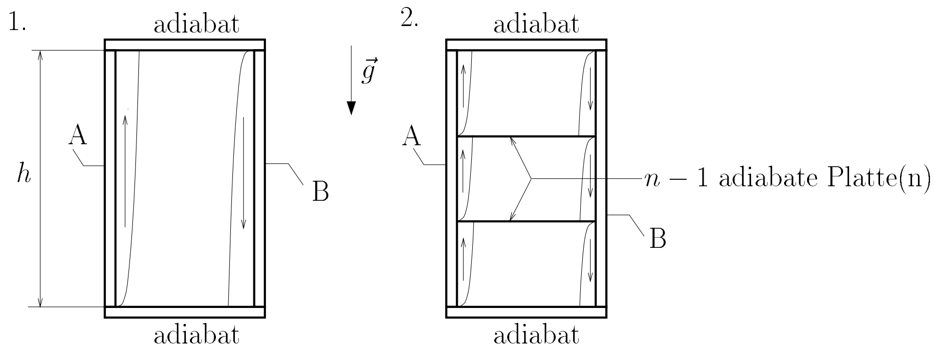
3.6.2 Hohlraum - 2

Ein Hohlraum, der Luft (zu behandeln als ideales Gas) enthält, besteht aus vertikalen Platten A und B, die auf einheitlichen Temperaturen $\vartheta_{\mathrm{A}} = 50$ °C und $\vartheta_{\mathrm{B}} = 15$ °C gehalten werden, aus adiabaten Seitenwänden und adiabaten Grund- und Deckflächen. Die Höhe der vertikalen Platten beträgt $h = 60\,\mathrm{cm}$. Man ermittle:

1. Ob die natürlichen Konvektionsgrenzschichten an den Wänden A und B laminar sind.
2. Den durch natürliche Konvektion von der Wand A zur Wand B übertragenen Wärmestrom pro Tiefeneinheit $\dot{Q}$. Man nehme dazu an, daß sich entlang der senkrechten Wände auftriebserzeugte Konvektionsgrenzschichten laut unten angeführter Skizze ausbilden und sich im Inneren des Hohlraumes die Temperatur $\vartheta_{\mathrm{i}} = (\vartheta_{\mathrm{A}} + \vartheta_{\mathrm{B}})/2$ einstellt.
3. Die Anzahl n der gleichen Kammern, in die der Hohlraum mittels adiabater Platten unterteilt werden muß, um den Wärmestrom pro Tiefeneinheit $\dot{Q}$ um mindestens 30 % zu erhöhen.

$$\nu_{\mathrm{L}} = 2.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \quad \lambda_{\mathrm{L}} = 0.027\,\mathrm{W/mK}, \quad \mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_{\mathrm{W}} - T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Nu}_x = 0.4\,\mathrm{Gr}_x^{\frac{1}{4}}$$

$$\mathrm{Pr} = 0.71, \quad \mathrm{Ra}_{\mathrm{krit}} = 10^9$$



3.6.3 Eisblock

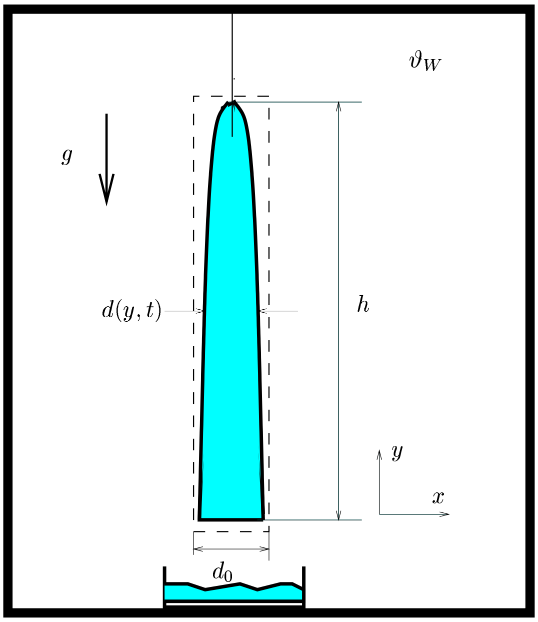
Ein quaderförmiger Eisblock ($\vartheta_{Eis} = 0\,°C$ Höhe $h = 38,3\,cm$, Tiefe $b = 21,2\,cm$, Dicke $d_0 = 1,1\,cm$) wird senkrecht aufgehängt. Die umgebende Luft habe die Temperatur $\vartheta_\infty = 18\,°C$.

- Man berechne den Wärmeübergang aufgrund von natürlicher Konvektion von der umgebenden Luft an den Eisblock.
- Man berechen den Wärmeübergang aufgrund von Strahlung. (Man betrachte den Eisblock als schwarzen Körper, der in einem Behälter mit schwarzer Oberfläche mit Lufttemperatur eingeschlossen ist).
- Man berechne die Dicke des Eisblockes $d(y,t)$.
- Wieviel Eis schmilzt pro Zeiteinheit?

$$\nu_{Luft} = 1,5 \times 10^{-5}\, m^2/s, \quad \lambda_{Luft} = 0,027\, W/mK,$$

$$Nu_x = 0,4\, Gr_x^{1/4}, \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8}\, W/m^2K^4,$$

$$l_{Wasser} = 333,4\, kJ/kg, \quad \rho_{Eis} = 999\, kg/m^3.$$



3.6.4 Natürliche Konvektion 1

Eine dünne senkrechte graue Platte (Höhe $h = 15cm$, Breite $b = 30cm$) wird von der Sonne $\dot{q}_R = 1.4kW/m^2$ unter einem Winkel $\varphi = 60°$ bestrahlt. Die Umgebungstemperatur (Luft) beträgt $T_L = 300K$. Man berechne unter Berücksichtigung der natürlichen Konvektion und Strahlung auf beiden Plattenseiten die stationäre Plattentemperatur.

Voraussetzungen:
a) Die Platte sei ein idealer Wärmeleiter und hat daher überall dieselbe Temperatur.
b) Die Strahlung an den Schmalseiten sei vernachlässigbar.
c) Die Platte sei ein grauer Strahler mit

$$\bar{\alpha} = 0.5\,(1 - \exp(-T/T_0))\,, \quad T_0 = 3000K,$$

Formelsammlung:

$$Nu_x = 0.4 Gr_x^{1/4},$$

Stoffwerte:

$$\nu = 2.5 \times 10^{-5} m^2/s, \quad \lambda_L = 0.027W/mK, \quad c_p = 716.3J/kgK, \quad \rho_L = 1.29kg/m^3$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2K^4$$

Hinweis: Die Gleichung für die Wandtemperatur löse man iterativ!

3.6.5 Natürliche Konvektion 2

1.) Ein elektrisches Einbauelement (zu betrachten als vertikale dünne Platte) mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ und der Breite $b = 14\,\text{cm}$ soll durch natürliche Konvektion gekühlt werden.

- Ist die Strömung laminar oder turbulent?
- Welche Gesamtverlustleistung kann für $\vartheta_e = 60°\mathrm{C}$, $\vartheta_\infty = 20°\mathrm{C}$ abgeführt werden?
- In welchem Abstand kann das nächste Element eingebaut werden, sodaß die Grenzschichten einander nicht behindern?

Hinweise:

$$\nu_{\text{Luft}} = 1.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}; \quad \mathrm{Pr} = 0.7; \quad \lambda_{\text{Luft}} = 0.027\,\mathrm{W/mK}, \quad c_{p,\text{Luft}} = 700\,\mathrm{J/kgK};$$

$$\frac{\delta}{x} = 4Gr_x^{1/4}; \quad \mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta\Delta T h^3}{\nu a}, \quad \mathrm{Nu}_x = 0.4\,\mathrm{Gr}_x^{1/4}, \quad \mathrm{Ra}_{\text{crit}} \approx 10^8.$$

3.6.6 Natürliche Konvektion 3

An der Wand eines Raumes (Raumtemperatur $T_\infty = 300\mathrm{K}$ befinde sich ein senkrechter rechteckiger ebener Heizkörper (Höhe $H = 50\mathrm{cm}$, Breite $B = 100\mathrm{cm}$ mit der Oberflächentemperatur $T_P = 350\mathrm{K}$.

Berechnen Sie die Wärmeübertragung vom Heizkörper an den Raum

a) aufgrund von Strahlung (schwarze Oberfläche), $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{W/m^2K^4}$.

b) aufgrund von natürlicher Konvektion.

$$\lambda = 0.03\mathrm{W/mK}, \quad \nu = 1.6 \times 10^{-5}\mathrm{m^2/s}, \beta = \frac{1}{T}$$

Lösung der Grenzschichtgleichungen für natürliche Konvektion an einer senkrechten isothermen Platte:

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_w x}{\lambda(T_w - T_\infty)} = \frac{\vartheta'(0, Pr)}{\sqrt{2}} Gr_x^{1/4}, \quad \vartheta'(0, 0.7) = 0.56, \quad Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}.$$

3.6.7 Natürliche Konvektion 4

Eine Haus wird mit einer mit Warmwasser betriebenen Zentralheizung beheizt. In einem Wohnraum (Lufttemperatur $\vartheta_L = 18°\mathrm{C}$) steht ein plattenförmigen, senkrechten Heizkörper (Länge $L = 1,5\mathrm{m}$, Höhe $H = 0,5\mathrm{m}$, Oberflächentemperatur ($\vartheta_H = 60°\mathrm{C}$). Beantworten Sie folgende Fragen:

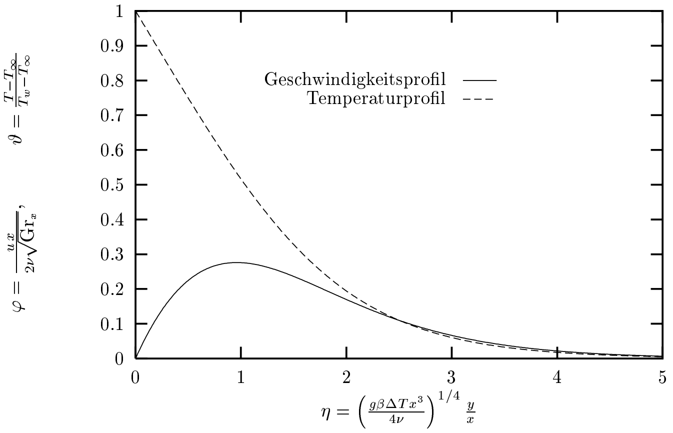
- Ist die Grenzschichtströmung entlang des Heizkörpers laminar oder turbulent?
- Wie groß ist die maximale Dicke der Grenzschicht?
- Wie groß ist die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht?

- Wie groß ist die Heizleistung Heizkörpers? (Der Heizkörper kann als grauer Körper mit dem Emissionsvermögen $\bar{\varepsilon} = 0.1$ angsehen werden, Die Umgebung kann als schwarzer Körper mit Umgebungstemperatur angenommen werden.)
- Wieviel Wasser muß durch den Heizkörper strömen, wenn der Temperaturunterschied von Vor- und Rücklauf 10K beträgt?

Formelsammlung:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Nu}_x = -\frac{\vartheta'(0,\mathrm{Pr})}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Gr}_x\right)^{1/4}$$

$$\lambda_{\text{Luft}} = 0,027\mathrm{W/mK}, \quad \nu_{\text{Luft}} = 1,7\times10^{-5}\mathrm{m^2/s}, \quad g = 9,81\mathrm{m/s^2},$$
$$\mathrm{Pr} = 0,72, \quad c_{p,\text{Wasser}} = 4,19\mathrm{kJ/kgK}, \quad \sigma = 5,67\times10^{-8}\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}.$$



Ähnlichkeitslösung für nat. Konvektion an vertikaler Platte für Pr=0,72

3.6.8 Natürliche Konvektion 5

Ein plattenförmiger senkrechter Heizkörper ($h = 0,5\,\mathrm{m}$) habe die Oberflächentemperatur $\vartheta_O = 60\,°\mathrm{C}$. Die Umgebungstemperatur beträgt $\vartheta_U = 20\,°\mathrm{C}$. Wie breit muß der Heizkörper mindenstens sein, sodaß t durch natürliche Konvektion die Heizleistung $\dot{Q} = 300\mathrm{W}$ an die Umgebung abgegeben wird.
Beantworten Sie folgende Fragen und tragen Sie ihre Ergebnisse in die Kästchen ein:

1. Bestimmen Sie die Grashof- und Rayleigh-Zahl.
2. Ist die Grenzschichtströmung laminar oder turbulent?
3. Geben Sie die Wäremstromdichte am oberen Plattenende an!
4. Berechnen Sie die mittlere Wärmestromdichte!
5. Bestimmen Sie die Breite des Heizkörpers!

$$Gr_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2}, \quad Nu_x = 0,4Gr_x^{1/4}, \quad Nu_P = \frac{4}{3}Nu_h, \quad Pr = 0,72, \quad Ra_{\text{krit}} = 5\times10^8,$$
$$\lambda = 0,027\,\mathrm{W/mK}, \quad \nu = 1,9\times10^{-5}\mathrm{m^2/s}.$$

3.6.9 Fenster

Berechnen Sie den stationären Heizbedarf $\dot{Q}$ eines luftgefüllten Raumes der Innentemperatur $\vartheta_\mathrm{i} = 25\,°\mathrm{C}$, wenn die Außentemperatur $\vartheta_\mathrm{a} = 0\,°\mathrm{C}$ beträgt, unter folgenden Annahmen:

- Der Raum tauscht nur über ein Fenster der Höhe $h = 60\,\mathrm{cm}$, der Dicke $s = 5\,\mathrm{mm}$ und der Breite $b = 1\,\mathrm{m}$ Wärme mit der Umgebung aus.
- Die Oberflächen der Glasscheibe befinden sich auf den einheitlichen Temperaturen ϑ_1 bzw. ϑ_2 (siehe Skizze).

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

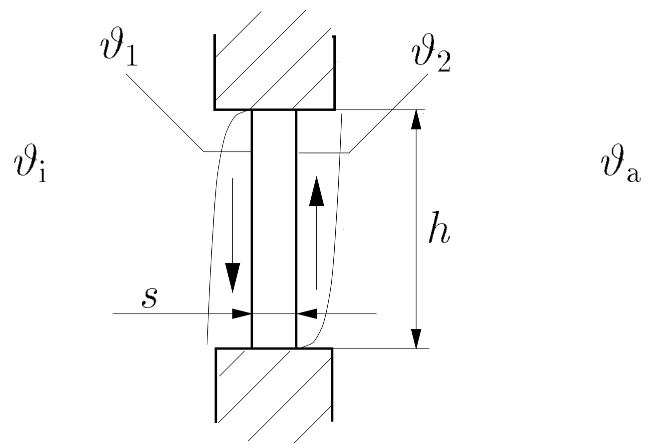
1. Als Referenztemperatur für β nehmen Sie stets $\frac{\vartheta_\mathrm{i}+\vartheta_\mathrm{a}}{2}$. Schreiben Sie alle Bedingungen für die drei Unbekannten $\dot{q}_\mathrm{W,m}, \vartheta_1$ und ϑ_2 auf und schließen Sie daraus, daß $\vartheta_\mathrm{i} - \vartheta_1 = \vartheta_2 - \vartheta_\mathrm{a}$ gilt.
2. Durch Eliminieren von beispielsweise ϑ_2 werden Sie auf eine Gleichung $\vartheta_1 = f(\vartheta_1)$ geführt; lösen Sie diese durch Iteration $\vartheta_{1,k+1} = f(\vartheta_{1,k})$, bis sich der Wert von ϑ_1 auf vier Nachkommastellen bei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten nicht mehr ändert.
3. Bestimmen Sie nun den Heizbedarf $\dot{Q}$; sind die natürlichen Konvektionsgrenzschichten über die gesamte Höhe h laminar ($\mathrm{Ra}_\mathrm{krit} = 10^9$)?

Stoffwerte:

$$\lambda_\mathrm{Luft} = 0,027\,\mathrm{W/mK}, \quad \nu_\mathrm{Luft} = 2,5 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \quad \mathrm{Pr} = 0,72, \quad \lambda_\mathrm{Glas} = 1,34\,\mathrm{W/mK}.$$

Formelsammlung:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_\mathrm{W} - T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Nu}_x = 0,4\,\mathrm{Gr}_x^{1/4}.$$



3.6.10 Grenzschicht in Schmelze

In einem Behälter (Höhe $H = 10\,\text{cm}$) befindet sich flüssiges Paraffin mit der Temperatur $\vartheta_\infty = 35\,°\text{C}$. Eine senkrechte Wand des Behälters wird isotherm auf $\vartheta_w = 20\,°\text{C}$ gehalten. Da die Schmelztemperatur $\vartheta_s = 27,5\,°\text{C}$ größer als die Wandtemperatur ist, wird die Wand von einer festen Paraffinschicht bedeckt.
Man berechne:

- die Wäremestromdichte $\dot{q}(y)$ an der Wand,
- die Dicke $d(y)$ der festen Paraffinschicht als Funktion der vertikalen Koordinaten y,
- die Dicke der festen Paraffinschichte bei $y = H$.

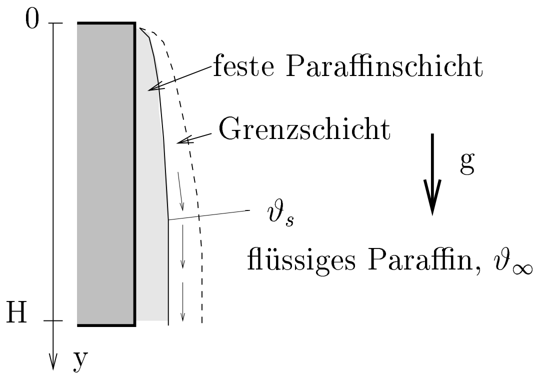
Hinweise:
- Aufgrund von natürlicher Konvektion bildet sich eine Grenzschicht entlang der Wand aus.
- Die Grenzschicht und die feste Paraffinschicht können als quasi-stationär angesehen werden.

Stoffwerte von Paraffin:

$\lambda_{\text{fl}} = 0,15\text{W/mK}, \quad \beta = 8,5{\times}10^{-4}\text{K}^{-1}, \quad Pr = 55,9, \quad a = 9{\times}10^{-8}\text{m}^2/\text{s}, \quad \lambda_{\text{fest}} = 0,36\text{W/mK}.$

Natürliche Konvektion an senkrechter Wand (laminar):

$$Nu_y = 0.486 Ra_y^{1/4}, \quad Ra = Pr\,Gr.$$



4 Phasenübergänge

4.1 Erstarrung

4.1.1 fortschreitende Erstarrungsfront

Ein Behälter, der zum Zeitpunkt $t = 0$ einen reinen Stoff mit Liquidustemperatur enthält, wird auf einer Seite unter folgenden Bedingungen gekühlt:

a) konstante Wandtemperatur $\vartheta_w < \vartheta_L$

b) konstante Wärmestromdichte $\dot{q}_w$

c) An der gekühlten Wand tritt ein Kontaktwärmewiderstand auf. Der Wärmeübergang ist durch $\dot{q}_w = \alpha(\vartheta_w - \vartheta_k)$ gegeben, wobei $\vartheta_k = const$ die Temperatur der gekühlten Wand und ϑ_w die Temperatur des Stahls an der gekühlten Wand ist.

Berechnen Sie unter der Voraussetzung einer großen Stefan-Zahl $St = \frac{l}{c_p(\vartheta_l - \vartheta_w)}$ den zeitlichen Verlauf der Erstarrungsfront.

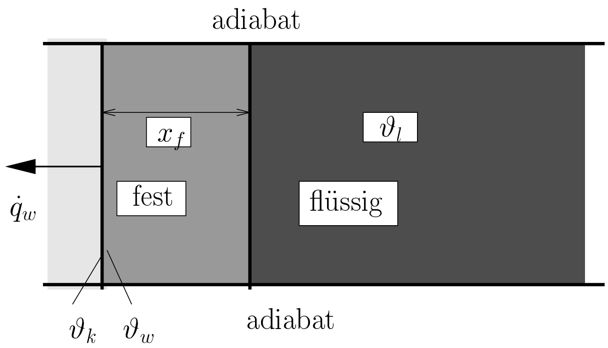


Abbildung 1

4.1.2 Stranggießen

Einem unten offenen Behälter (Kokille) wird flüssiger Stahl zugeführt. Die Wände des Behälters seien gekühlt, sodaß dort der Stahl erstarrt und sich eine Strangschale bildet. Die Strangschale wird nach unten mit der Gießgeschwindigkeit u_c abgezogen. Man berechne die Dicke der Strangschale am Kokillenende unter den folgenden Vereinfachungen und Kühlbedingungen:

- Die Stefan Zahl sei groß

- Die Schmelze habe Liquidustemperatur
- Die Differenz zwischen Liquidus und Solidustemperatur sei vernachlässigbar.

Kühlbedingungen:

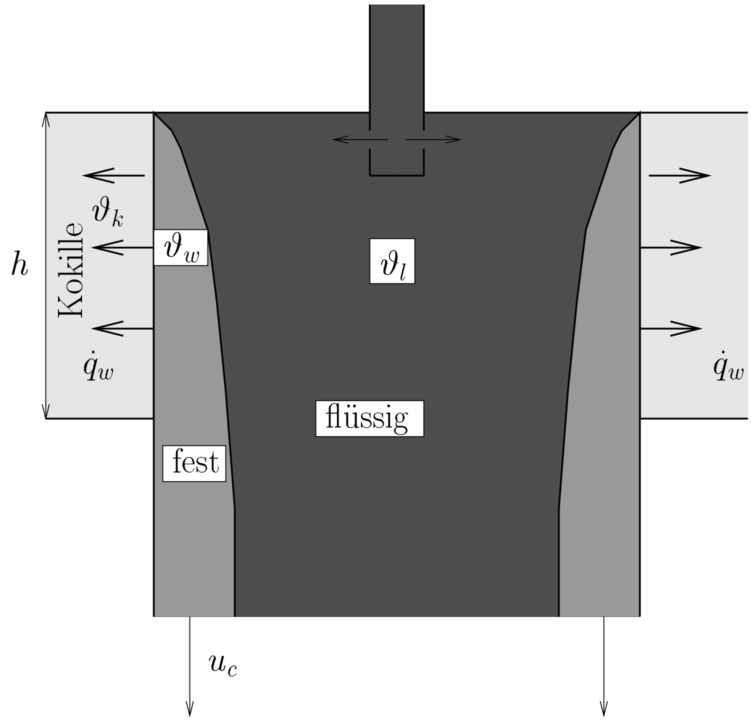
a) konstante Wandtemperatur $\vartheta_w = \vartheta_k < \vartheta_L$

b) konstante Wärmestromdichte $\dot{q}_w$

c) An der gekühlten Wand tritt ein Kontaktwärmewiderstand auf. Der Wärmeübergang ist durch $\dot{q}_w = \alpha(\vartheta_k - \vartheta_w)$ gegeben, wobei ϑ_k die Temperatur der gekühlten Wand und ϑ_w die Temperatur des Stahls an der gekühlten Wand ist.

$$\vartheta_l = 1520\,^\circ\mathrm{C}, \quad \vartheta_k = 300\,^\circ\mathrm{C}, \quad \alpha = 4000\mathrm{W/m^2K}, \quad \dot{q}_w = 1\mathrm{MJ/m^2},$$

$$\rho = 7200\,\mathrm{kg/m^3}, \quad l = 270\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h = 80\,\mathrm{cm}, \quad \lambda = 35\,\mathrm{W/mK}, \quad u_c = 3\mathrm{m/min}.$$



Prinzipskizze des vertikalen Stranggießens

4.1.3 Eisdecke

An der Oberfläche eines Sees hat sich eine nach einem Kaltlufteinbruch (Lufttemperatur $\vartheta_L = -10°\mathrm{C}$) innerhalb eines Tages eine 2cm dicke Eisschicht gebildet.
Man berechne, wann bei gleichbleibenden Verhältnissen die Eisdecke 0,5m dick ist.

$l = 335\mathrm{kJ/kg}$, $c_p = 4,2\mathrm{kJ/kg\ K}$ $\lambda_{\mathrm{Eis}} = 2,22\mathrm{W/mK}$, $\rho = 1,0\mathrm{kg/dm^3}$

Annahmen: i) Die Temperatur des flüssigen Wassers sei $\vartheta_w = 0°\mathrm{C}$.
ii) $\frac{c_p \Delta\vartheta}{l} << 1$.
Lösung:
$\dot{q}_1 = -\rho l \frac{d\Delta x}{dt}$ Wärmestrom aufgrund der Bewegung der Grenzefläche Eis - Wasser.
$\dot{q}_2 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x$ Wärmestrom in Folge Temperaturänderung in der Eisschicht.

$$\dot{q}_2 \sim \rho c_p \Delta x \frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_w - (\vartheta_1 - \vartheta_w)(x/\Delta x - 1)) = \rho c_p \Delta x \Delta\vartheta \frac{x}{(\Delta x)^2}\frac{d\Delta x}{dt} \sim \rho c_p \Delta\vartheta \frac{d\Delta x}{dt}.$$

Daher: $|q_2/q_1| \sim c_p \Delta\vartheta / l = 4,2 \times 10/335 = 0,12 << 1$

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\vartheta_w - \vartheta_1}{h} = -\alpha(\vartheta_1 - \vartheta_L) = -l\rho \frac{d\Delta x}{dt},$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_L + \frac{\lambda \Delta\vartheta}{\lambda + \alpha \Delta x},$$

$$l\rho(\lambda + \alpha\Delta x)\frac{d\Delta x}{dt} = \alpha\lambda\Delta\vartheta$$

$$\alpha l \rho \frac{\Delta x^2}{2} + \lambda l \rho \Delta x - \alpha\lambda\Delta\vartheta\ t = 0.$$

Mit $t = 86400s$ und $\Delta x = 0,02m$ ergibt sich $\alpha = 7,8 W/m^2K$ und für $\Delta x = 0,5m$ erhalten wir $t \sim 47$Tage.

4.2 Kondensation

4.2.1 Filmkondensation

Eine dünne, vertikale Metallplatte (Höhe $h = 50\,\mathrm{cm}$ Breite $b = 75\,\mathrm{cm}$) trennt einen mit gesättigtem Wasserdampf ($\vartheta_s = 100\,°\mathrm{C}$) gefüllten Raum von der umgebenden Luft ($\vartheta_L = 20\,°\mathrm{C}$). Die Platte wird mit der Geschwindigkeit $U = 10\,m/s$ angeströmt. Man bestimme

a) ob die Grenzschichtströmung auf der Luftseite laminar oder turbulent ist ($Re_{krit} \sim 500000$),

b) die stationäre Plattentemperatur ϑ_p,

c) den an die Luft abgegebenen Wärmestrom $\dot{Q}$,

d) wieviel Dampf pro Zeiteinheit kondensiert,

e) die Dicke der Kondensatschicht δ am unteren Plattenende.

Vereinfachungen:
- Der Wärmeübergang Dampf/Platte erfolgt durch Filmkondensation,
- Die Platte sei ein idealer Wärmeleiter mit konstanter Temperatur ϑ_p

- Der Wärmeübergang Luft/Platte erfolgt mittels einer erzwungenen Konvektionsgrenzschicht.

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2}, \quad \text{erzwungene Konvektion},$$

$$Nu_x = \frac{x}{\delta}, \quad \delta = \left(\frac{4\lambda(\vartheta_s - \vartheta_p)\nu x}{\rho g r} \right)^{1/4}, \quad \text{Filmkondensation},$$

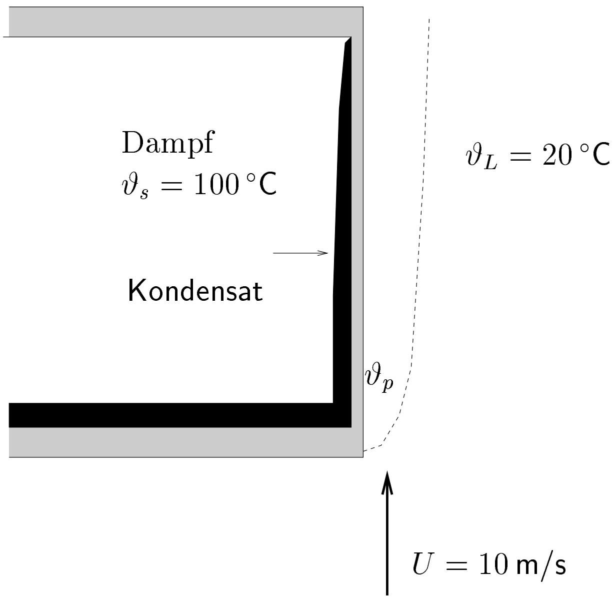
$$\nu_{Luft} = 1,5 \times 10^{-5}\, m^2/s, \quad \lambda_{Luft} = 0,027\, W/mK,$$

$$\nu_{Wasser} = 2,9 \times 10^{-7}\, m^2/s, \quad \lambda_{Wasser} = 0,68\, W/mK, \quad r = 2257\, kJ/kg, \quad \rho = 958,4\, kg/m^3.$$

Man gehe wie folgt iterativ vor:

i) Man bestimme den Wärmestrom durch die Platte mittels erzwungener Konvektion auf der Luftseite der Platte für eine Plattentemperatur $\vartheta_{p,0} = 100°C$.

ii) Man bestimme die Plattentemperatur so, daß der Wärmestrom, der aufgrund der Filmkondensation vom Dampf an die Platte abgegeben wird gleich dem Wärmestrom ist, der von der Platte an die Luft abgegeben wird.



5 Strahlung

5.1 Strahlungsaustausch eines Körpers mit seiner Umgebung

5.1.1 Glühdraht

Ein Glühdraht in einer 100W Glühbirne habe einen Durchmesser von 0.1mm und eine Länge von 20cm. Unter der Annahme, daß die erzeugte Wärme als Strahlung abtransportiert wird und der Faden ein Emissionsvermögen von 0.32 hat, bestimmen Sie die Temperatur des Fadens.

5.1.2 Gehäuse eines elektrischen Gerätes

Ein elektrisches Gerät mit einem quaderförmigen Gehäuse (Länge L=0,318m, Breite =0,160m Höhe=0,418m) ist an einer senkrechten Wand montiert. Die Oberfläche des Gehäuses habe eine Temperatur $\vartheta_g = 125°C$. Die umgebenden Wände haben eine Oberflächentemperatur von $\vartheta_u = 25°C$. Berechnen Sie die den Wärmeaustausch des Gerätes mit seines Umgebung aufgrund von Strahlung. Nehmen Sie alle Oberfächen als schwarze Strahler an.

b) Berechnen Sie den Wärmeübergang für das Gerät aus Bsp. a) aufgrund von natürlicher Konvektion mit einer Nußeltzahl von $Nu = 110$. Geben Sie den den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten an. Wählen Sie als Bezugslänge die Höhe des Gerätes. Wärmeleitfähigkeit von Luft: $\lambda_{\text{Luft}} = 0,026 W/mK$.

c) Berechnen Sie den Wärmeübergang für das Gerät aus Bsp. a) aufgrund von erzwungener Konvektion mit einer Nußeltzahl von $Nu = 8000$. Geben Sie den m mittleren Wärmeübergangskoeffizienten an. Wie groß ist der Anteil der Strahlung beim Wärmeübergang?

5.1.3 Thermoelement in Gasströmung

Ein elektrisches Gerät mit einem quaderförmigen Gehäuse (Länge L=0,318m, Breite =0,160m Höhe=0,418m) ist an einer senkrechten Wand montiert. Die Oberfläche des Gehäuses habe eine Temperatur $\vartheta_g = 125°C$. Die umgebenden Wände haben eine Oberflächentemperatur von $\vartheta_u = 25°C$. Berechnen Sie die den Wärmeaustausch des Gerätes mit seines Umgebung aufgrund von Strahlung. Nehmen Sie alle Oberfächen als schwarze Strahler an.

b) Berechnen Sie den Wärmeübergang für das Gerät aus Bsp. a) aufgrund von natürlicher Konvektion mit einer Nußeltzahl von $Nu = 110$. Geben Sie den den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten an. Wählen Sie als Bezugslänge die Höhe des Gerätes. Wärmeleitfähigkeit von Luft: $\lambda_{\text{Luft}} = 0,026 W/mK$.

c) Berechnen Sie den Wärmeübergang für das Gerät aus Bsp. a) aufgrund von erzwungener Konvektion mit einer Nußeltzahl von $Nu = 8000$. Geben Sie den m mittleren Wärmeübergangskoeffizienten an. Wie groß ist der Anteil der Strahlung beim Wärmeübergang?

5.1.4 bestrahlte Raumstation-1

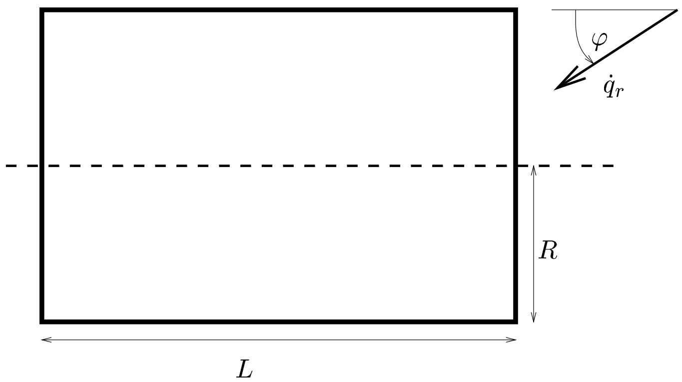
Eine zylindrische Raumstation (Länge $L = 5\,\text{m}$, Radius $R = 1.6\,\text{m}$) wird unter einem Winkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$ von der Sonne bestrahlt. Die Oberfläche der Raumstation habe die einheitliche Temperatur $T_0 = 350\,\text{K}$ und strahle wie ein grauer Körper mit dem Emissionsvermögen $\bar{\varepsilon} = 0.17$ und dem Absorpitionvermögen $\bar{\alpha} = 0.35$. Im Inneren der Raumstation befinden sich Geräte, die einen Abwärme strom $\dot{Q}_V$ erzeugen.

Berechnen Sie:

- den absorpierten Wärmestrom,
- den emittierten Wärmestrom,
- den Abwärmestrom
- die Frequenz des Strahlungsmaximus der Sonnenstrahlung,
- die Wellenlänge des Intensitätsmaximun der emittierten Strahlung.

$$\left(\frac{\nu}{T}\right)_m = 5.88 \times 10^{10}\,(\text{sK})^{-1}, \quad (\lambda T)_m = 2.90 \times 10^{-3}\,\text{mK}, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4,$$

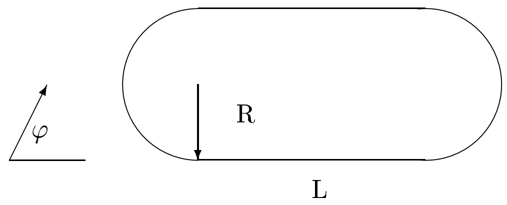
$$\dot{q}_r = 1,4\,\text{kW/m}^2, \quad T_{\text{Sonne}} = 6000\,\text{K}.$$



5.1.5 Raumstation-2

Eine Raumstation hat die Form eines Kreiszylinders (Höhe L, Radius R) auf dessen Deckflächen jeweils eine Halbkugel (Radius R) aufgesetzt ist. (Skizze!). Über die Oberfläche wird Strahlungsenergie, die unter dem Winkel φ einfällt, aufgenommen. Im Raumschiff wird pro Zeiteinheit eine Verlustwärme von $Q_V = 3,3$ kW erzeugt. Berechnen Sie die (konstant angenommene) Oberflächentemperatur bei gegebenem Emissonsvermögen $\bar{\varepsilon}$ und Absorpionsvermögen $\bar{\alpha}$ für $\varphi = 0$ bzw $\varphi = \pi/2$.

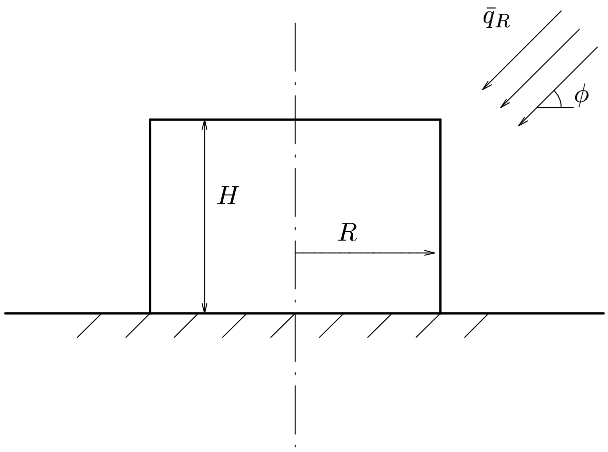
$L = 5$ m, $R = 1,5$ m, $\bar{\varepsilon} = 0,89$, $\bar{\alpha} = 0,13$, $\sigma = 5,67.10^{-8}$ W/m^{2}K^4, $\dot{q}_R = 1,4$ kW/m^2



.

5.1.6 Lagertank

Ein zylindrischer Lagertank (Radius R, Höhe H, $R/H = 2/\pi$) wird von der Sonne unter dem Winkel ϕ (Skizze) bestrahlt. Bei welchem Winkel $\bar{\phi}$ nimmt der Tank ein Maximum an Strahlungsenergie auf? (Strahlung, die von der Erde emittiert bzw. reflektiert wird, kann vernachlässigt werden.)

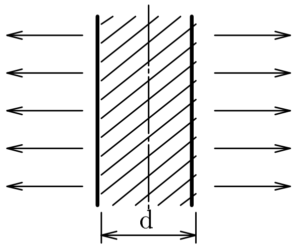


.

5.1.7 Strahlungsheizkörper

In der Mittelebene eines plattenförmigen Strahlungsheizkörpers (Dicke $d = 100\ mm$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 50\ W/mK$) wird Wärme freigesetzt. Sie wird über die beiden grauen Oberflächen (Emissionsvermögen $\bar{\varepsilon} = 0,5$) emittiert, wobei das Intensitätsmaximum bei der Frequenz $\nu^* = 3,81.10^{13} s^{-1}$ auftritt. Berechnen Sie die Temperatur der Mittelebene!

$$(\nu/T)_{max} = 5,88.10^{10} (sK)^{-1}$$
$$\sigma = 5,67.10^{-8}\ W/m^2K^4$$



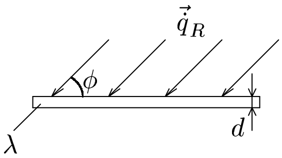
5.1.8 sonnenbestrahlte Platte - 1

Sonnenstrahlung (Strahlungsflußvektor $\vec{q}_R$) trifft unter dem Winkel ϕ auf eine ebene Platte (Dicke d, Wärmeleitfähigkeit λ) auf. Andere Strahlungsquellen sind vernachlässigbar. Die Seite A der Platte ist **grau** mit mittlerem Absorptionsvermögen $\overline{\alpha}_A$ bezüglich Sonnenlicht. Die Seite B ist nichtgrau mit $\overline{\alpha}_B = \overline{\alpha}_A$ und vernachlässigbarem Emissionsvermögen ($\varepsilon_B \approx 0$).

Fall 1: Seite B ist sonnenbestrahlt.

Fall 2: Seite A ist sonnenbestrahlt.

Berechnen Sie für beide Fälle jeweils die Oberflächentemperaturen T_A und T_B (Stefan-Boltzmann-Konstante σ gegeben)!



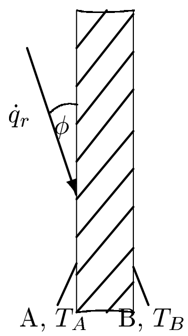
5.1.9 sonnenbestrahlte Platte - 2

Sonnenstrahlung (Strahlungsfluß $\dot{q}_r$) trifft unter dem Winkel ϕ auf die Seite A einer ebenen Wand laut Skizze. Andere Strahlungsquellen sind vernachlässigbar. Die Seite A der Wand ist grau mit mittlerem Absorptionsvermögen α_A bezüglich Sonnenlicht. Die Seite B hat die Oberflächentemperatur T_B und ein mittleres Emissionsvermögen ϵ_B.

a) Berechnen Sie die sich im stationären Fall einstellende Wandtemperatur T_A.

b) Wie groß sind T_A und T_B, wenn $\epsilon_B = 0$.

(Die Stefan-Boltzmannkonstante σ ist gegeben.)



5.1.10 bestrahlte Platte 1

Eine kreisförmige Aluminiumplatte (Radius $R = 1,5\,\mathrm{m}$, Dicke $d = 2\,\mathrm{cm}$, Dichte $\rho = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 910\,\mathrm{J/kg\,K}$ der einheitlichen Temperatur $T_a = 300\mathrm{K}$ wird unter einem Winkel von $\beta = 45°$ von der Sonne ($T_s = 6000\mathrm{K}$, $\dot{q}_R = 1400\,\mathrm{W/m^2}$) angestrahlt.

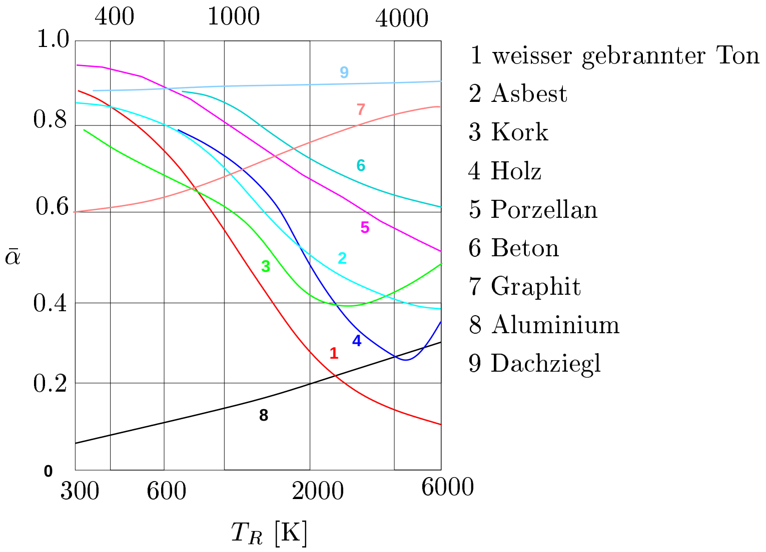
Betrachten Sie nur die Wärmeübertragung mittels Strahlung. Die Aluminiumplatte kann als grauer Strahler betrachtet werden.

a) Welchen Wärmestrom nimmt die Platte netto auf?

b) Berechnen Sie die Zeitdauer, innerhalb welcher sich die Platte zufolge des Netto-Wärmestroms von Pkt. a) um 1 K auf 301 K erwärmt.

c) Welche stationäre Endtemperatur erreicht die Platte?

d) Unter welchem Winkel β_0 müßte die Platte bestrahlt werden, damit die stationäre Plattentemperatur $300K$ wäre?



Abhängigkeit des Gesamtabsorptionsvermögens $\bar{\alpha}$ verschiedener Oberflächen der Temperatur $T_0 = 300$ K für Strahlung, die von einer grauen Oberfläche der Temperatur T_R emittiert wird.

5.1.11 strahlende Platte 1

Eine Metallplatte (Länge $l = 3$m, Breite $b = 1$m, Dickte $d = 0.1$m, Dichte $\rho = 7200$kg/m^3, $c_p = 2000$J/kg) habe eine Ausgangstemperatur von $\vartheta = 1200°$C. Unter den Voraussetzungen, daß
-) die Platte wie ein schwarzer Körper in alle Richtungen strahlt,
-) die Platte ein idealer Wärmeleiter ist,
berechne man wie lange es dauert, bis die Platte auf $\vartheta = 1000°$C abgekühlt ist.

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4.$$

5.1.12 Platte und Spiegel

Sonnenlicht (Strahlungsfluß $\dot{q}_r$) trifft zum Teil direkt, zum Teil vom ebenen Spiegel 1 ($\bar{\rho} = 1$) reflektiert auf die beidseitig graue quadratische Platte 2 (geg.: $\bar{\alpha}$) auf.
a) Wie groß ist die von Platte 2 pro Zeiteinheit insgesamt absorbierte Energie, wenn die Winkel θ und ϕ sowie die Seitenlänge l gegeben sind?
b) Bei welchem Winkel ϕ_m erreicht die absorbierte Strahlungsenergie ein Maximum? (Die Entfernung des Spiegels von der Platte sei so groß, daß die von der Platte emittierte und vom Spiegel zur Platte zurück reflektierte Strahlung vernachlässigt werden kann.)

5.1.13 kritischer Radius

Ein Zylinder (Radius $r = 3\,\text{cm}$, Höhe $h = 30\,\text{cm}$) mit der konstanten Temperatur $T_0 = 500\,\text{K}$ ist mit einer Isolierschicht (Wärmeleitfähigkeit λ =0,1 W/mK überzogen. Die Oberfläche der Isolierschicht strahle grau mit dem Emissionsvermögen $\bar{\varepsilon}$=0,05, die Umgebung strahle wie ein schwarzer Körper der Temperatur T_{U}.

- Man berechne die Wärmeabgabe $\dot{Q}$ des Zylinders an die Umgebung durch Strahlung für die Dicke $d_1 = 5\text{mm}$ der Isolierschicht.
- Nimmt der Wärmeübergang ab oder zu, wenn die Isolierschicht dicker gemacht wird? Berechnen Sie den Wärmeübergang für eine Dicke $d_2 = 10\,\text{mm}$. Erklären Sie das Ergebnis!
- Stellen Sie die Wärmeabgabe $\dot{Q}$ des Zylinders als Funktion der Dicke d der Isolierschicht dar.
- Bei welcher Dicke $d_{\max}$ der Isolierschicht ist die Wärmeabgabe des Zylinders am größten? (kritischer Radius $r_k = r + d_{\max}$

Hinweis: Lösen Sie die auftretenden nichtlinearen Gleichungen iterativ. Als Startwert wählen Sie T_0.
Die Strahlung der Umgebung und der Deckflächen des Zylinders kann vernachlässigt werden!

5.2 Strahlungsaustausch zweier Körper

5.2.1 schwarze Platte

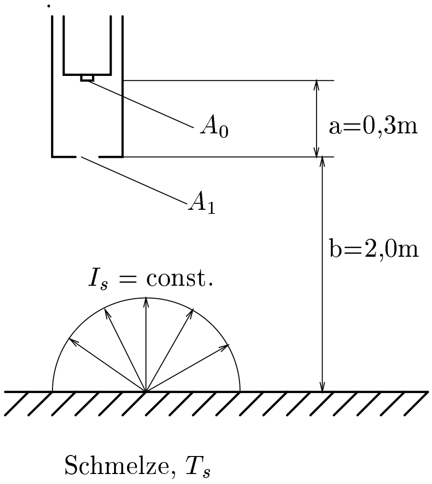
Eine Seite einer *schwarzen* Platte der Dicke $d = 5mm$ und Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 390W/mK$ nimmt einen Wärmestrom von $\dot{q} = 30W/m^2$ auf. Die andere Seite tauscht Wärmestrahlung mit einer Oberfäche der Temperatur $\vartheta_o = 0°C$ aus. Berechnen Sie die Oberflächentemperaturen der Platte.

5.2.2 Strahlungsthermometer

1) Die Temperatur einer Metallschmelze soll mit einem Strahlungsthermometer entsprechend der dargestellten Anordnung gemessen werden.

Annahmen:
1.) Die von der Oberfläche der Schmelze ausgehende Strahlung habe in jede Richtung die dieselbe Gesamtintensität I_s.
2.) Absorption und Emission der Luft können vernachlässigt werden.
3.) Die vom Gehäuse und von A_o emittierte Strahlung kann vernachlässigt werden.
4.) Die Blende A_1 sei kreisförmig mit Radius $r_1 = 4,8\text{mm}$. Die Dedektorfäche A_0 sei ebenfalls kreisförmig mit Radius $r_0 = 1,8\text{mm}$.

a) Leiten Sie eine Beziehung zwischen I_s und dem auf A_0 auftreffenden Strahlungsfluß aus der gegebenen Geometrie für $r_1 << a$ her.
b) Welche Temperatur hat die Metallschmelze, wenn man einen auf A_0 auftreffenden Strahlungsfluß von 0,01 W elektronisch gemessen hat, und die Schmelze als grauer Strahler mit $\bar{\varepsilon} = 0,9$ angenommen wird?



5.2.3 konzentrische Kugeln

Sie sitzen in 1.5m Entfernung vor einem Kachelofen (1,5m Breite, 2m Höhe) mit der Oberflächentemperatur $\vartheta = 40°C$ (80°C). Unter der Annahme, daß der Ofen wie ein schwarzer Körper strahlt, und ihr Kopf wie ein schwarzer Körper absorbiert, schätzen Sie ab, wieviel Strahlungswärme ihr Kopf aufnimmt. Bei welcher Wellenlänge (Frequenz) liegt das Strahlungsmaximum?

Vereinfachungen:
(i) Nehmen Sie den Kopf als Kugel mit $20cm$ Durchmesser an.
(ii) Ersetzen Sie die strahlende Fäche des Ofens durch einen flächengleichen Kreis.

5.2.4 vor dem Kachelofen

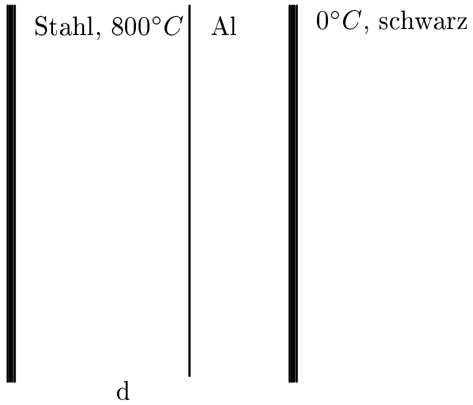
Man berechne den Strahlungsaustausch zwischen zwei grauen konzentrischen Kugeln (Kreiszylindern) für a) spiegelnde b) diffuse Reflexion.

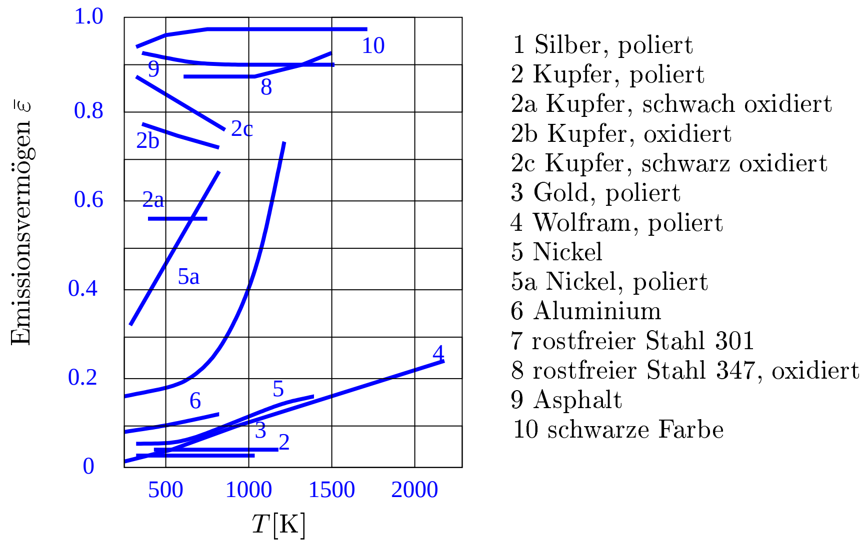
5.2.5 Strahlenschutzschirm - 1

Zwischen zwei parallelen schwarzen Wänden A, B mit den Temperaturen T_A bzw. T_B wird eine dünne ebenfalls schwarze Platte eingeschoben. Man berechne um wielviel der Wärmeaustausch zwischen den Wänden A und B durch die Platte verringert wird. Berechnen Sie weiters die Temperatur der Platte.

5.2.6 Strahlenschutzschirm - 2

Eine schwarze Wand mit der Temperatur 0°C tauscht Strahlung mit einer parallelen Stahl Platte (stainless steel 301) der Temperatur 800°C aus. Bestimmen Sie, um wieviel Prozent der Wärmübergang abnimmt, wenn eine polierte Aluminiumplatte der Dicke d=5mm dazwischen eingeschoben wird.
Wie groß ist der Temperaturunterschied zwischen der Vorder- und der Rückseite der Aluminiumplatte? ($\lambda_{\text{Al}} = 190\frac{W}{m^2K}$).





Abhängigkeit des Emissionsvermögens verschiedener Oberflächen von Oberflächentemperatur.

5.3 Strahlungsausbreitung

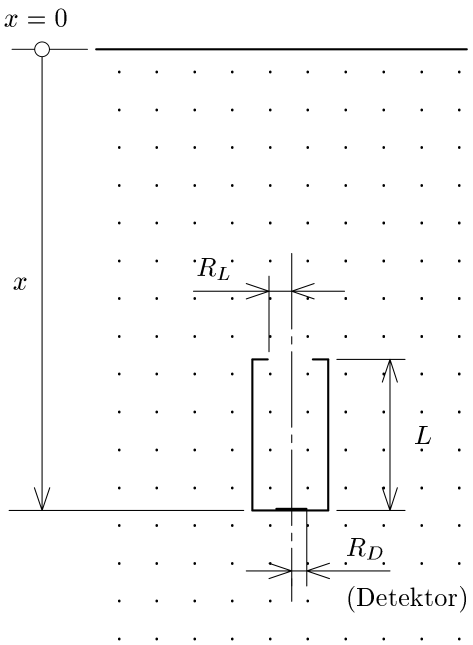
5.3.1 strahlungsdurchlässige Platte

An der Innenseite A einer strahlungsdurchlässigen Platte (Dicke d, Absorptionskoeffizient a_ν) hat die Strahlungsintensität den richtungsunabhängigen Wert $I_{\nu A}$.
Mit welcher richtungsabhängigen Strahlungsintensität $I_{\nu B}(\Theta)$ treffen die Strahlen die Platteninnenseite B, wenn Emission im Inneren der Platte vernachlässigbar ist?

5.3.2 Strahlungsthermometer

Das skizzierte Strahlungsthermometer (geg,: L, R_L, R_D, wobei $R_L/L << 1$, $R_D/R_L << 1$; Strahlungsaustausch zwischen Gehäuse und Detektorfläche vernachlässigbar) kann einen Strahlungsenergiestrom $\dot{Q} > \dot{Q}_{min}$ registrieren. Es soll dazu verwendet werden, die Strahlungsintensitätsabnahme in einem kontinuierlichen Medium mit gegebenem, konstanten Absorptionskoeffizienten $\overline{a}$ und vernachlässigbarer Emission zu bestimmen.
Ab welcher Entfernung $x = A$ von der Ebene $x = 0$ kann keine Strahlung mehr festgestellt werden, wenn in der Ebene $x = 0$ die richtungsunabhängige Strahlungsintensität $I = I_0$

gegeben ist?



5.3.3 Temperatur der Sonne

Schätzen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne aufgrund folgender Daten ab: Strahlungsfluß der Sonne auf der Erde: $\dot{q}_E = 1,4\text{kW/m}^2$, Entfernung Erde Sonne: $r = 1,5 \times 10^8\text{km}$, Radius der Sonne: $R_S = 6,9 \times 10^5\text{km}$. Betrachten Sie die Sonne als schwarzen Strahler ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4$).

5.3.4 Flamme

Man berechne die Richtungsabhängigkeit der Strahlungsintensität einer bestimmten Frequenz ν an der Oberfäche einer zylindrischen Flamme.
Annahmen: Die Flamme ist die einzige Strahlungsquelle. Die Absorptions- und Emissionskoeffizienten a_ν, e_ν seien im Innneren der Flamme konstant und gegeben.

5.3.5 Glasplatte

Eine Glasplatte läßt im Wellenlängenbereich zwischen $0.4\mu m$ und $4\mu m$ 90% der thermischen Strahlung durch und ist außerhalb dieses Wellenlängenbandes für Strahlung undurchlässig. Man berechne welchen Anteil des Strahlungswärmeflusses durch diese Glasplatte für die Strahlung von einem schwarzen Körper mit der Temperatur (a) 500K, (b) 1000K, (c) 6000K.

5.4 Strahlung und Konvektion

5.4.1 strahlende Platte 3

Eine senkrechte dünne Aluminumplatte ($h = b = 10\,\mathrm{cm}$) wird von der Sonne unter dem Winkel $\phi = \frac{\pi}{2}$ bestrahlt. Unter der Voraussetzung, daß die Platte überall die gleiche Temperatur T_p hat, berechne man die Gleichgewichtstemperatur für folgende Fälle:

a) Die Platte befindet sich in Vakuum.

b) Die Platte befindet in Luft unter Normalbedingungen ($\vartheta = 20\,°\mathrm{C}$), und wird mit von unten mit $U = 2\,\mathrm{m/s}$ angeströmt. (erzwungene Konvektion). Vernachlässigen Sie die emittierte Strahlung!

c) Die Platte befindet in Luft unter Normalbedingungen ($\vartheta = 20\,°\mathrm{C}$, natürliche Konvektion). Vernachlässigen Sie die emittierte Strahlung!

d) Die Platte befindet sich in Luft unter Normalbedingungen ($\vartheta = 20°\mathrm{C}$, natürliche Konvektion). Berücksichtigen Sie die emittierte Strahlung!

Hinweis: Zu d): Die Gleichgewichtstemperatur ist iterativ zu bestimmen. Vernachlässigen Sie zunächst die emittierte Strahlung, und bestimmen Sie die Plattentemperatur aus dem Wärmeübergang durch Konvektion. Bestimmen Sie danach die emittierte Strahlung, und berechnen Sie dann nochmals die Plattentemperatur aus dem Wärmeübergang durch natürliche Konvektion.

Temperatur der Sonne : $T_s = 6000\,\mathrm{K}$, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$, $q_R = 1400\,\mathrm{W/m^2}$,

$$\text{nat. Konvektion: } \mathrm{Nu}_x = 0.4\,\mathrm{Gr}_x^{1/4}, \quad \mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2}, \quad \frac{\delta}{x} = 4\mathrm{Gr}_x^{-1/4},$$

$$\text{erzwungene Konvektion: } \mathrm{Nu}_x = 0.33\sqrt{\mathrm{Re}_x},$$

$$\lambda_{\text{Luft}} = 0.027\mathrm{W/mK}, \quad \nu = 1.7 \times 10^{-5}\mathrm{m^2/s}.$$