

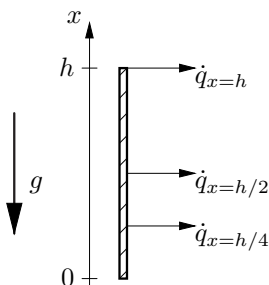
## Vertikales Plättchen

Ein 12 cm hohes, 2 cm breites und 0,8 mm dickes Metallplättchen wird in ruhender Luft aufgehängt. Die langen Kanten seien parallel zur Richtung der Schwerebeschleunigung orientiert. Das Plättchen hat eine Temperatur von 62 °C, die Luft eine Temperatur von 18 °C. Vernachlässigen Sie für die Berechnungen den Wärmeübergang an den Schmalseiten des Plättchens.

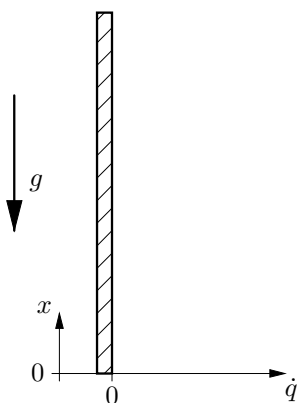
Wärmeübergang an der vertikalen Platte,  $Pr \approx 1$ :  $Nu_x = 0,4 Gr_x^{1/4}$ .

Schwerebeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Stoffwerte des Plättchens:  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 430 \text{ J/kgK}$ . Stoffwerte von Luft: Siehe Anhang.

- Geben Sie die Prandtl-Zahl an, die Sie für die Berechnung der natürlichen Konvektionsströmung benötigen. Geben Sie die Temperaturen an, bei der Sie die Stoffwerte ablesen.
- Berechnen Sie die Grashof- und die Rayleighzahl am oberen Ende des Plättchens. Geben Sie die benötigten Stoffwerte und die Temperaturen an, bei der diese abgelesen werden.
- Wie hoch ist die Nußeltzahl am oberen Ende des Plättchens?
- Berechnen Sie die vom Plättchen abgegebene Wärmestromdichte  $\dot{q}$  am oberen Ende des Plättchens sowie bei der halben Höhe und bei einem Viertel der Höhe des Plättchens.



- Berechnen Sie die Nußeltzahl des Plättchens sowie die mittlere Wärmestromdichte  $\dot{q}_m$ , die vom Plättchen abgegeben wird.
- In welcher Weise hängt die vom Plättchen abgegebene Wärmestromdichte  $\dot{q}$  von der Lauflänge  $x$  ab? Skizzieren Sie den Verlauf von  $\dot{q}$ . Zeichnen Sie in der Skizze auch den ungefähren Wert der mittleren Wärmestromdichte  $\dot{q}_m$  ein.



- Berechnen Sie den gesamten vom Plättchen abgegebenen Wärmestrom  $\dot{Q}$ .
- Wie lange dauert es bei einem Wärmestrom von  $\dot{Q} = 2 \text{ Watt}$ , bis das Plättchen um 5 °C abgekühlt ist? Nehmen Sie an, das Plättchen habe überall dieselbe Temperatur.

## Zinnschmelze

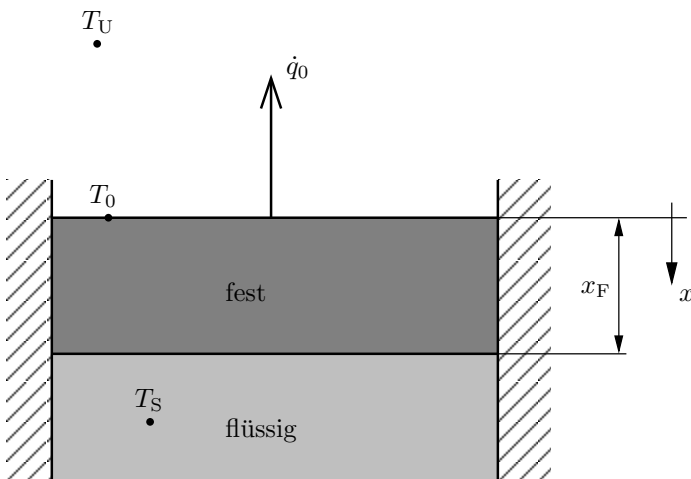
Ein Behälter, dessen Wände als adiabat zu betrachten sind, enthält flüssige Zinnschmelze bei der Schmelztemperatur  $T_S$ . Ab dem Zeitpunkt  $t = t_0$  wird die Schmelze an der freien Oberfläche gekühlt und gibt Wärme ab. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt  $\alpha = 32 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\alpha = \dot{q}_0 / (T_0 - T_U)$ . Der einfacheren Rechnung halber seien die Dichten der flüssigen und der festen Phase gleich.

- Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit der Erstarrungsfront  $dx_F/dt$  und der Wärmestromdichte  $\dot{q}_F$  an der Position der Erstarrungsfront her.
- Welche Geschwindigkeit hat die Erstarrungsfront zum Zeitpunkt  $t = t_0$ ?

Unter der Annahme einer großen Stefan-Zahl,  $Sf \gg 1$ :

- Skizzieren Sie die Temperaturverteilung,  $T$  über  $x$ , nachdem sich eine Schicht erstarrten Zinns gebildet hat. Skizzieren Sie auch die Verteilung der Wärmestromdichte,  $\dot{q}$  über  $x$ .
- Wie lange dauert es, bis 2 cm des Zinns erstarrt sind?  
Hinweis: Drücken Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_F$  als Funktion von  $x_F$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda_{\text{fest}}$ ,  $T_S$  und  $T_U$  aus. Lösen Sie dann die Differentialgleichung für  $x_F$ .
- Berechnen Sie die Stefan-Zahl im Falle:  $x_F = 3 \text{ cm}$ ,  $t - t_0 = 525 \text{ s}$ ,  $T_0 = 493 \text{ K}$ ,  $q_0 = 18 \text{ kW/m}^2$ .

$T_S = 497 \text{ K}$ ,  $T_U = 330 \text{ K}$ . Stoffwerte von Zinn: Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{fest}} = 68 \text{ W/mK}$ ,  $c_p = 244 \text{ J/kgK}$ ,  $l = 60,7 \text{ kJ/kg}$ ,  $\rho = 7,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .



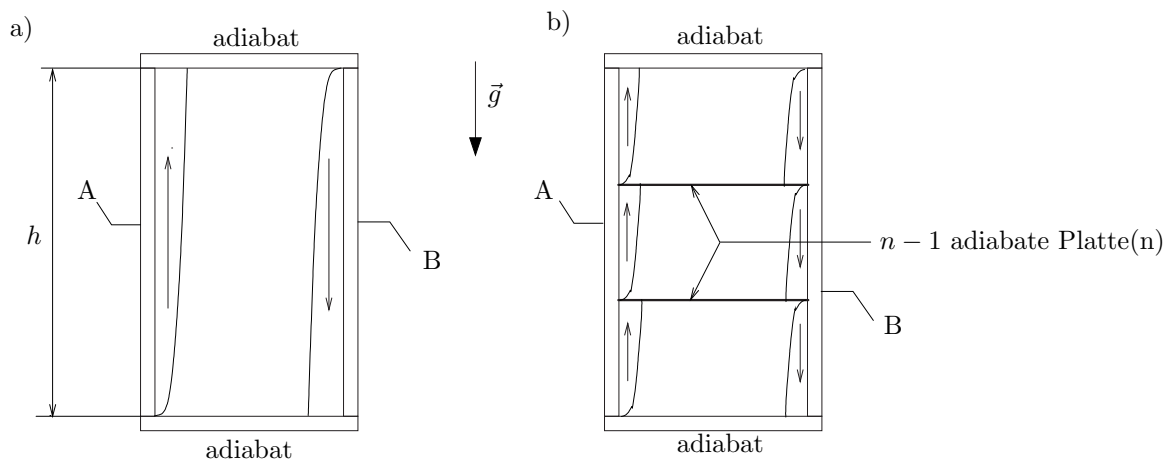
## Kammern

Ein Hohlraum, der Luft (zu behandeln als ideales Gas) enthält, besteht aus vertikalen Platten A und B, die auf einheitlichen Temperaturen  $\vartheta_A = 50^\circ\text{C}$  und  $\vartheta_B = 15^\circ\text{C}$  gehalten werden, aus adiabaten Seitenwänden und adiabaten Grund- und Deckflächen. Die Höhe der vertikalen Platten beträgt  $h = 60\text{ cm}$ . Man ermittle:

- Ob die natürlichen Konvektionsgrenzschichten an den Wänden A und B laminar sind.
- Den durch natürliche Konvektion von der Wand A zur Wand B übertragenen Wärmestrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}^{(L)}$ . Man nehme dazu an, daß sich entlang der senkrechten Wände auftriebserzeugte Konvektionsgrenzschichten laut unten angeführter Skizze ausbilden und sich im Inneren des Hohlraumes die Temperatur  $\vartheta_i = (\vartheta_A + \vartheta_B)/2$  einstellt.
- Die Anzahl  $n$  der gleichen Kammern, in die der Hohlraum mittels adiabater Platten unterteilt werden muss, um den Wärmestrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}^{(L)}$  um mindestens 30 % zu erhöhen.

$$\nu_L = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda_L = 0,027 \text{ W/mK}, \quad \text{Gr}_x = \frac{g\beta(T_W - T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad \text{Nu}_x = 0,4 \text{ Gr}_x^{1/4}$$

$$\text{Pr} = 0,71, \quad \text{Ra}_{\text{krit}} = 10^9$$



## Nickelzylinder

Ein Nickelstab mit einer Bohrung, Außendurchmesser 16 mm, Innendurchmesser 1 mm, Länge 4 m, habe eine einheitliche Temperatur von  $50^\circ\text{C}$ . Der Stab befinde sich in ruhender Luft von  $15^\circ\text{C}$ .

Berechnen Sie den im stationären Zustand abgeführten Wärmestrom.

Wie lange dauert es, bis der Zylinder um  $3^\circ\text{C}$  abkühlt?

Verwenden Sie für den Wärmeübergang einerseits eine Korrelation für die freie Konvektion am waagrecht Zylinder,  $L \gg d$  (Baehr & Stephan, 2. Aufl., 1996; S. 395),

$$\text{Nu}_m = \left( 0,6 + \frac{0,387 \text{ Ra}_d^{1/6}}{\left( 1 + (0,559/\text{Pr})^{9/16} \right)^{8/27}} \right)^2, \quad 10^{-5} \leq \text{Ra}_d \leq 10^{12}; \quad \text{Nu}_m = \frac{\alpha_m d}{\lambda}.$$

Nehmen Sie andererseits an, die Grenzschicht entlang des Zylindermantels verhalte sich wie eine Grenzschicht an der vertikalen Platte,  $\text{Nu}_x = 0,4 (\text{Gr}_x)^{1/4}$ .

Stoffwerte von Nickel:  $\rho_{\text{Ni}} = 8910 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 94 \text{ W/mK}$ ,  $c = 431 \text{ J/kgK}$ .

Stoffwerte von Luft: Siehe beiliegenden Auszug aus dem VDI-Wärmeatlas.

Ein 12 cm langes, 2,0 cm breites und 0,8 mm dickes Metallplättchen wird in ruhender Luft aufgehängt. Die lange Seite zeige in Richtung der Schwerebeschleunigung. Das Plättchen hat eine Temperatur von 62°C, die Luft eine Temperatur von 18°C. Vernachlässigen Sie für die Berechnungen den Wärmeübergang an den Schmalseiten des Plättchens.

Wärmeübergang an der vertikalen Platte,  $Pr \approx 1$ :  $Nu_x = 0,4 Gr_x^{1/4}$ .

Schwerebeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Stoffwerte des Plättchens:  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 430 \text{ J/kgK}$ . Stoffwerte von Luft: Siehe Anhang.

a) Geben Sie die Prandtl-Zahl an, die Sie für die Berechnung der natürlichen Konvektionsströmung benötigen. Geben Sie die Temperaturen an, bei der Sie die Stoffwerte ablesen.

Alle Stoffwerte, außer  $\beta$ , werden bei der mittleren Temperatur genommen.

$$\bar{T} = \frac{18 + 62}{2} = 40^\circ\text{C}; \quad \nu(40^\circ\text{C}) = 1,726 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad \alpha(40^\circ\text{C}) = 2,424 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{1,726}{2,424} = 0,7120$$

b) Berechnen Sie die Grashof- und die Rayleighzahl am oberen Ende des Plättchens. Geben Sie die benötigten Stoffwerte und die Temperaturen an, bei der diese abgelesen werden.

$$Gr_{x=h} = \frac{g\beta \Delta T h^3}{\nu^2}; \quad \beta \text{ bei der Temperatur der ungestörten Strömung:}$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{273,15 + 18} = 3,435 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}; \quad \nu(40^\circ\text{C}) = 1,726 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Gr_{x=h} = \frac{9,81 \cdot 3,435 \cdot 10^{-3} \cdot 44 \cdot 0,12^3}{1,726^2 \cdot 10^{-10}} = 8,6 \cdot 10^6; \quad Ra_{x=h} = Pr \cdot Gr_{x=h} = 6,12 \cdot 10^6$$

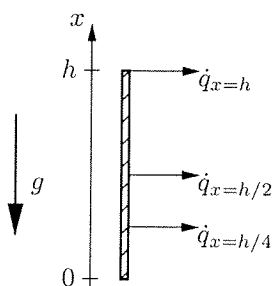
c) Wie hoch ist die Nusseltzahl am oberen Ende des Plättchens?

$$Nu_{x=h} = 0,4 \cdot (Gr_{x=h})^{1/4} = 21,66$$

e) mit  $Nu_x := \frac{\dot{q} x}{\lambda \Delta T} \Rightarrow \frac{\dot{q} x}{\lambda \Delta T} = 0,4 \cdot \left( \frac{g\beta \Delta T x^3}{\nu^2} \right)^{1/4}$ ; x herausheben

$$\dot{q} = \lambda \Delta T 0,4 \left( \frac{g\beta \Delta T}{\nu^2} \right)^{1/4} \frac{x^{3/4}}{x}; \quad \lambda(40^\circ\text{C}) = 2,716 \cdot 10^{-2} \text{ W/mK}$$

e) Berechnen Sie die vom Plättchen abgegebene Wärmestromdichte  $\dot{q}$  am oberen Ende des Plättchens sowie bei der halben Höhe und bei einem Viertel der Höhe des Plättchens.



$$\dot{q} = 2,716 \cdot 10^{-2} \cdot 44 \cdot 0,4 \cdot \left( \frac{9,81 \cdot 3,435 \cdot 10^{-3} \cdot 44}{1,726^2 \cdot 10^{-10}} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{x^{1/4}} = \frac{126,97}{x^{1/4}}$$

$$\dot{q}_{x=h} = \frac{126,97}{0,12^{1/4}} = 215,72 \text{ W/m}^2;$$

$$\dot{q}_{x=h/2} = \frac{126,97}{0,06^{1/4}} = 256,54 \text{ W/m}^2;$$

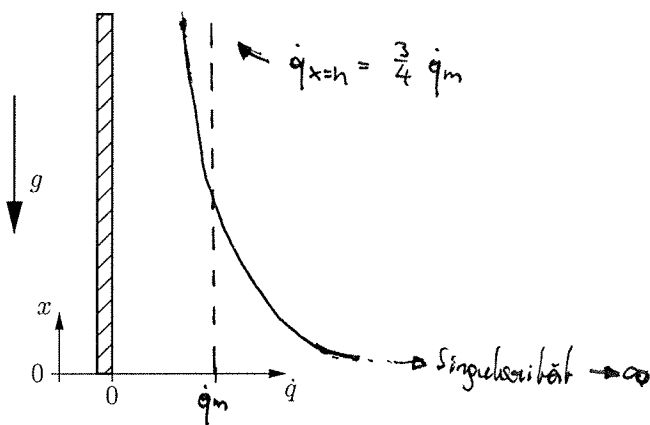
$$\dot{q}_{x=h/4} = \frac{126,97}{0,03^{1/4}} = 305,08 \text{ W/m}^2$$

d) Berechnen Sie die Nußeltzahl des Plättchens sowie die mittlere Wärmestromdichte  $\dot{q}_m$ , die vom Plättchen abgegeben wird.

$$Nu_p = \frac{4}{3} Nu_{x=h} = \frac{4}{3} \cdot 21,66 = 28,88;$$

$$Nu_p := \frac{\dot{q}_m \cdot h}{\lambda \Delta T} \quad \text{somit:} \quad \dot{q}_m = \frac{4}{3} \dot{q}_{x=h} = \frac{4}{3} \cdot 215,72 = 287,63 \text{ W/m}^2$$

e) In welcher Weise hängt die vom Plättchen abgegebene Wärmestromdichte  $\dot{q}$  von der Lauflänge  $x$  ab? Skizzieren Sie den Verlauf von  $\dot{q}$ . Zeichnen Sie in der Skizze auch den ungefähren Wert der mittleren Wärmestromdichte  $\dot{q}_m$  ein.



f) Berechnen Sie den gesamten vom Plättchen abgegebenen Wärmestrom  $\dot{Q}$ .

$$\dot{Q} = 2bh \dot{q}_m = 2 \cdot 0,02 \cdot 0,12 \cdot 287,6 = 1,38 \text{ Watt}$$

g) Wie lange dauert es bei einem Wärmestrom von  $\dot{Q} = 2$  Watt, bis das Plättchen um  $5^\circ\text{C}$  abgekühlt ist? Nehmen Sie an, das Plättchen habe überall dieselbe Temperatur.

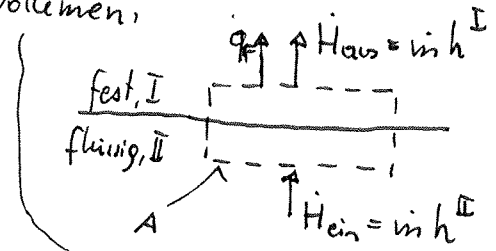
$$\frac{dH}{dt} = -\dot{Q} \Rightarrow m c_p dT = -\dot{Q} dt \quad m c_p \Delta T = \dot{Q} \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\rho V c_p \Delta T}{\dot{Q}} = \frac{7800 \cdot 0,12 \cdot 0,02 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 430 \cdot 5}{2} = 16,1 \text{ s}$$

## Zusatzblatt 1

a) Mit Erstarrungsfront mitbewegtes Kontrollvolumen,

1. HS für offene Systeme:  $\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}_E + H_{ges}^{(m)}$   
 $\rightarrow = 0, \text{stationär}$   $\leftarrow = 0$



$$\dot{Q} = -\dot{q}_F \cdot A \quad ; \quad H_{ges}^{(m)} = H_{ein} - H_{aus} = \rho A \frac{dx_F}{dt} \cdot l$$

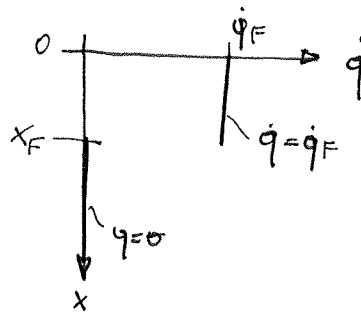
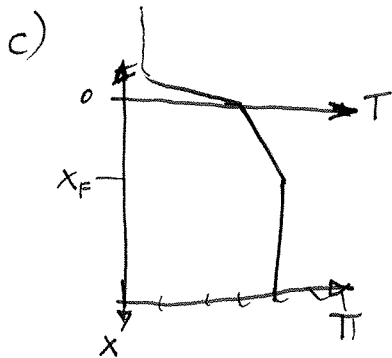
minus, TD: zugeführte Wärme positiv

hier: eingezeichnete Richtung entspricht W.-abfuhr

$$\Rightarrow 0 = -\dot{q}_F \cdot A + \rho A \frac{dx_F}{dt} l \Rightarrow \dot{q}_F = \rho l \frac{dx_F}{dt}$$

b)  $t = t_0 : T_0 = T_s \Rightarrow \dot{q}_F = \dot{q}_0 = \alpha (T_s - T_u) = 32 \cdot \underbrace{(487 - 330)}_{167} = 5344 \text{ W/m}^2$

$$\frac{dx_F}{dt} = \frac{\dot{q}_F}{\rho l} = \frac{\alpha (T_s - T_u)}{\rho l} = \frac{5344}{7,3 \cdot 10^3 \cdot 60,7 \cdot 10^3} = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} = 12,1 \mu\text{m/s}$$



d)

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \lambda \frac{T_s - T_0}{x_F} \\ \dot{q} &= \alpha (T_0 - T_u) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{q} \cdot \frac{x_F}{\lambda} + \dot{q} \cdot \frac{1}{\alpha} = T_s - T_0 + T_0 - T_u = T_s - T_u$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{T_s - T_u}{\frac{x_F}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}}$$

einsetzen in b):  $\rho l \frac{dx_F}{dt} = \frac{T_s - T_u}{\frac{x_F}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}}$

Separation:  $\left( \frac{x_F}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} \right) dx_F = \frac{T_s - T_u}{\rho l} dt$

## Zusatzblatt 2

Integration, 
$$\frac{x_F^2}{2\lambda} + \frac{x_F}{\alpha} = \frac{T_s - T_u}{\rho l} t$$

$x_F = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ :

$$\frac{2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 68} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{32} = \frac{167}{7,3 \cdot 10^3 \cdot 60,7 \cdot 10^3} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = 1662 \text{ s}$$

f) 
$$\zeta_f = \frac{l}{\rho_p \Delta T} = \frac{60,7 \cdot 10^3}{244 \cdot (497 - 493)} = 62$$

**Stoffwerte von Luft**

$\vartheta$	Temperatur in °C	$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität in $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$p$	Druck in bar	$\beta$	isobarer Wärmeausdehnungskoeffizient $(1/v)(\delta v/\delta T)_p$ in $10^{-3} \text{K}^{-1}$
$\rho$	Dichte in $\text{kg m}^{-3}$	$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit in $10^{-3} \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$v$	spezifisches Volumen in $\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$	$\eta$	dynamische Viskosität in $10^{-6} \text{Pa s}$
$Z$	Realgasfaktor $p v/(RT)$	$\nu$	kinematische Viskosität in $10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$h$	spezifische Enthalpie in $\text{kJ kg}^{-1}$	$a$	Temperaturleitfähigkeit in $10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$s$	absolute spezifische Entropie in $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Pr	Prandtl-Zahl

Charakteristische Größen:

Molare Masse  $\tilde{M} = 28,96 \text{ kg kmol}^{-1}$ , Gaskonstante  $R = 287,22 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

Kritische Zustandsgrößen:

$$p_c = 37,66 \text{ bar}, T_c = 132,52 \text{ K bzw. } \vartheta_c = -140,63 \text{ °C}, \rho_c = 313 \text{ kg m}^{-3}$$

Tripelpunkttemperatur  $T_t = 60 \text{ K bzw. } \vartheta_t = -213,15 \text{ °C}$

Tabelle 1. Stoffwerte von Luft beim Druck  $p = 1 \text{ bar}$

$\vartheta$	$\rho$	$h$	$s$	$c_p$	$\beta$	$\lambda$	$\eta$	$\nu$	$a$	Pr
-200	5,106	68,20	5,407	1,186	17,24	6,886	4,997	9,786	11,37	0,8606
-180	3,851	90,52	5,678	1,071	11,83	8,775	6,623	17,20	21,27	0,8086
-160	3,126	111,5	5,882	1,036	9,293	10,64	7,994	25,58	32,86	0,7784
-140	2,639	132,1	6,050	1,021	7,726	12,47	9,294	35,22	45,81	0,7617
-120	2,287	152,4	6,192	1,014	6,657	14,26	10,55	46,14	61,50	0,7502
-100	2,019	172,7	6,316	1,011	5,852	16,02	11,77	58,29	78,51	0,7423
-80	1,807	192,9	6,427	1,009	5,227	17,74	12,94	71,59	97,30	0,7357
-60	1,636	213,0	6,526	1,007	4,725	19,41	14,07	85,98	117,8	0,7301
-40	1,495	233,1	6,618	1,007	4,313	21,04	15,16	101,4	139,7	0,7258
-30	1,433	243,2	6,660	1,007	4,133	21,84	15,70	109,5	151,3	0,7236
-20	1,377	253,3	6,701	1,007	3,968	22,63	16,22	117,8	163,3	0,7215
-10	1,324	263,3	6,740	1,006	3,815	23,41	16,74	126,4	175,7	0,7196
0	1,275	273,4	6,778	1,006	3,674	24,18	17,24	135,2	188,3	0,7179
10	1,230	283,5	6,814	1,007	3,543	24,94	17,74	144,2	201,4	0,7163
20	1,188	293,5	6,849	1,007	3,421	25,69	18,24	153,5	214,7	0,7148
30	1,149	303,6	6,882	1,007	3,307	26,43	18,72	163,0	228,4	0,7134
40	1,112	313,7	6,915	1,007	3,200	27,16	19,20	172,6	242,4	0,7122
60	1,045	333,8	6,978	1,009	3,007	28,60	20,14	192,7	271,3	0,7100
80	0,9859	354,0	7,036	1,010	2,836	30,01	21,05	213,5	301,4	0,7083
100	0,9329	374,2	7,092	1,012	2,683	31,39	21,94	235,1	332,6	0,7070
120	0,8854	394,5	7,145	1,014	2,546	32,75	22,80	257,5	364,8	0,7060
140	0,8425	414,8	7,195	1,016	2,422	34,08	23,65	280,7	398,0	0,7054
160	0,8036	435,1	7,243	1,019	2,310	35,39	24,48	304,6	432,1	0,7050
180	0,7681	455,6	7,289	1,022	2,208	36,68	25,29	329,3	467,1	0,7049
200	0,7356	476,0	7,334	1,026	2,115	37,95	26,09	354,7	503,0	0,7051
250	0,6653	527,5	7,437	1,035	1,912	41,06	28,02	421,1	596,2	0,7063
300	0,6072	579,6	7,532	1,046	1,745	44,09	29,86	491,8	694,3	0,7083
350	0,5585	632,1	7,620	1,057	1,605	47,05	31,64	566,5	796,8	0,7109
400	0,5170	685,3	7,702	1,069	1,486	49,96	33,35	645,1	903,8	0,7137
450	0,4813	739,0	7,779	1,081	1,383	52,82	35,01	727,4	1015	0,7166
500	0,4502	793,4	7,852	1,093	1,293	55,64	36,62	813,5	1131	0,7194
550	0,4228	848,3	7,921	1,105	1,215	58,41	38,19	903,1	1251	0,7221
600	0,3986	903,9	7,986	1,116	1,145	61,14	39,17	996,3	1375	0,7247
650	0,3770	959,9	8,049	1,126	1,083	63,83	41,20	1093	1503	0,7271
700	0,3576	1016	8,108	1,137	1,027	66,46	42,66	1193	1635	0,7295
750	0,3402	1074	8,165	1,146	0,9772	69,03	44,08	1296	1771	0,7318
800	0,3243	1131	8,220	1,155	0,9317	71,54	45,48	1402	1910	0,7342
850	0,3099	1189	8,273	1,163	0,8902	73,98	46,85	1512	2052	0,7368
900	0,2967	1247	8,324	1,171	0,8523	76,33	48,19	1624	2197	0,7395
1000	0,2734	1365	8,420	1,185	0,7853	80,77	50,82	1859	2492	0,7458

\*) Bearbeiter der Seiten **Dbb1** bis **Dbb13**: Dipl.-Ing. R. Krauss, Stuttgart