Modellversuch

Der Wärmeübergang von einem mit der Flüssigkeit A umströmten Körper mit einer charakteristischen Abmessung d_A soll in einem Modellversuch an einem Modell mit der charakteristischen Abmessung $d_B = 0{,}1 d_A$ in einem Fluid B bestimmt werden. Nehmen Sie an, dass Dissipation und Kompressibilitätseffekte vernachlässigbar sind.

Stoffeigenschaften:

Fluid A: Viskosität $\nu_A = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, Dichte $\rho_A = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_A = 6{,}0\,\mathrm{W/m\,K}$, spez. Wärmekapazität $c_{p,A} = 2{,}4\,\mathrm{kJ/kg\,K}$.

Fluid B: Viskosität $\nu_B = \nu_B(\vartheta) = \nu_{B,0}\frac{\vartheta_1}{\vartheta+\vartheta_0}$, mit $\nu_{B,0} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $\vartheta_0 = 80\,^\circ\mathrm{C}$, $\vartheta_1 = 40\,^\circ\mathrm{C}$ Dichte $\rho_B = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_B = 3{,}0\,\mathrm{W/m\,K}$, spez. Wärmekapazität $c_{p,B} = 1{,}6\,\mathrm{kJ/kg\,K}$.

1) Berechnen Sie die Prandtl-Zahl von Fluid A.

Lösung:

$$Pr_A = \frac{\nu_B \rho_A c_{p,A}}{\lambda_A} = 5{,}12 \quad .$$

2) Bei welcher Temperatur ϑ_B muss der Versuch durchgeführt werden?

Lösung: Es muss gelten $Pr_A = Pr_B$:

$$\nu_B = \nu_A \frac{\lambda_B}{\lambda_A}\frac{\rho_A}{\rho_B}\frac{c_{p,A}}{c_{p,B}} = 0{,}8 \cdot 10^{-5}\mathrm{m^2/s} \quad ,$$

$$\nu_B = \nu_{B,0}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_B + \vartheta_0} \qquad \Rightarrow \vartheta_B = 40\,^\circ\mathrm{C} \quad .$$

3) Man berechne die Anströmgeschwindigkeit u_B im Modellversuch, wenn die Anströmgeschwindigkeit im Original $u_A = 4\,\mathrm{m/s}$ beträgt. Hinweis: $\nu_B(\vartheta_B) = 0{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.

Lösung: Aus $Re_A = Re_B$ folgt

$$u_B = u_A \frac{\nu_B}{\nu_A}\frac{d_A}{d_B} = 20\,\mathrm{m/s} \quad .$$

4) Man bereche das Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten α_A/α_B von Original und Modellversuch.

Lösung: Aus $Nu_A = Nu_B$ folgt

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}\frac{d_B}{d_A} = 0{,}2 \quad .$$

5) Geben Sie eine dimensionslose Kennzahl an, die den Einfluss der Dissipation auf den Wärmeübergang beschreibt. Wie ist diese Kennzahl definiert?

Lösung:

- Brinkmann-Zahl $Br = \frac{\mu u^2}{\lambda \Delta T}$,
- Eckert-Zahl $Ec = \frac{u^2}{c_p \Delta T} = Br/Pr$.

Gleitlager

Die Welle (Durchmesser der Welle $d = 60\,\mathrm{mm}$) in einem Gleitlager (Spaltbreite $b = 4{,}5\,\mathrm{mm}$) wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 90\,\mathrm{s^{-1}}$ in Bewegung gesetzt. Im Spalt zwischen Welle und Gleitlager befinde sich Öl (Viskosität $\mu_{Oel} = 0{,}50\,\mathrm{Pa\,s}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Oel} = 3\,\mathrm{W/mK}$, Dichte $\rho_{Oel} = 700\,\mathrm{kg/m^3}$, Wärmekapazität $c_{p,Oel} = 2{,}4\,\mathrm{kJ/kg\,K}$.)

Anfänglich habe das Gehäuse und die Welle dieselbe Temperatur $\vartheta_0 = 22\,^\circ\mathrm{C}$. Im Spalt stellt sich unmittelbar nach dem Beginn der Drehbewegung der Welle eine stationäre Strömung ein. Da das Aufwärmen der Welle sehr langsam erfolgt, kann auch die Temperaturverteilung im Öl als quasi-stationär angesehen werden. Da der Spalt dünn im Vergleich zum Durchmesser der Welle ist, können Sie die Strömung als ebene Couette-Strömung betrachten. Das Gehäuse das Lagers wird auf der Temperatur ϑ_0 gehalten.

6) Ist die laminare Couette-Strömung stabil?
Hinweis: $Re_* = 41{,}3\sqrt{R/b}$, $R = (d+b)/2$, $Re_{\text{crit}} = 1900$

Lösung:

$$u = \omega\frac{d}{2} = 2{,}7\,\text{m/s}, \quad Re = \frac{\mu u b}{\rho} = 17{,}01 \quad , \quad Re_* = 110{,}6 \quad .$$

Da $Re < Re_*$ und $Re < Re_{\text{crit}}$ gilt, ist laminare Couette-Strömung stabil.

7) Berechnen Sie die Dissipation und geben Sie Differentialgleichung für die Temperaturverteilung im Spalt an.
Lösung:

$$\dot{\phi} = \mu\frac{u^2}{b^2} = 180\,\text{kW/m}^3,$$

$$\lambda\frac{\text{d}^2T}{\text{d}y^2} = -\dot{\phi} \quad .$$

8) Wie groß ist die maximale Temperatur im Öl unmittelbar nach Bewegungsbeginn, wenn sich im Spalt eine quasistationäre Temperaturverteilung eingestellt hat?
Lösung: Randbedingungen: $\vartheta(0) = \vartheta(b) = \vartheta_0$

$$\vartheta(y) = \vartheta_0 - \frac{\dot{\phi}}{2\lambda}y(y-b).$$

maximale Temperatur bei $y = b/2$,

$$\vartheta_{max} = \vartheta_0 + \frac{\dot{\phi}b^2}{8\lambda} = 22{,}152\,^\circ\text{C} \quad .$$

9) Welche Endtemperatur erreicht die Welle? (Eine möglicher Wärmeaustausch der Welle mit ihrer Umgebung sei nur über das Öl möglich.)

Lösung: Da im Endzustand die Welle adiabat ist (kein Wärmestrom) gilt $Br = 2$ und daher $Nu = 2$. Es gilt

$$\Delta\vartheta = \frac{\mu u^2}{\lambda\, Br} = 0{,}6075\,^\circ\text{C} \quad .$$

10) Man berechne im stationären Endzustand die von der Welle aufgebrachte Leistung (pro Tiefeneinheit) und den vom Öl an das Gehäuse (pro Tiefeneinheit) abgegebenen Gesamtwärmestrom und erkläre eine eventuell auftretende Differenz zwischen diesen beiden Größen.
Lösung:

$$\dot{W} = \tau u d\pi = \mu\frac{u^2 d\pi}{b} = 152{,}68\,\text{W/m} \quad ,$$

$$\dot{q} = \dot{\phi}b = \frac{\mu u^2}{b} \quad .$$

$$\dot{Q} = \dot{q}(d+2b)\pi = \frac{\mu u^2}{b}\pi(d+2b) = \dot{W}\left(1 + \frac{2b}{d}\right) = 175{,}82\,\text{W/m}.$$

Die auftretende Differenz ist eine Folge der Annahme, es handle sich um eine ebene Couette-Strömung. $\dot{Q} = 1{,}15\,\dot{W}$ Der relative Fehler ist $(\dot{Q} - \dot{W})/\dot{W} = 2b/d = 0{,}15$.

Rohrströmung

11) Bei einer laminaren vollausgebildenten Rohrströmung ist im Fall konstanter Wandwärmestromdichte der Wärmeübergang Rohrwand/Flüssigkeit durch $Nu = 48/11$ beschrieben. Man berechne die Stanton Zahl. Der Rohrwiderstandbeiwert λ_R einer laminaren Rohrströmung lautet $\lambda_R = 64/Re$. Gilt die Reynoldsche Analogie auch für eine laminare Rohrströmung?

Lösung:

$$St = \frac{\dot{q}}{\rho u c_p \Delta T} = \frac{\dot{q}d}{\lambda\Delta T}\frac{\nu}{ud}\frac{\lambda}{\rho c_p \nu} = Nu\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr} = \frac{48}{11}\frac{1}{Pr}\frac{\lambda_R}{64} = \frac{3\lambda_R}{44\,Pr} \quad .$$

Auch im laminaren Fall ist die Stanton-Zahl proportional zum Rohrwiderstandsbeiwert λ_R. Somit gilt auch im laminaren Fall die Reynoldsche Analogie, dass der Wärmeübergang proportional zum Druckverlust ist.

12) Durch ein adiabates Rohr der Länge $L = 30\,\mathrm{m}$ und dem Innendurchmesser $d = 30\,\mathrm{mm}$ strömt eine inkompressible Flüssigkeit (Wärmekapazität $c_v = 3{,}0\,\mathrm{kJ/kg\,K}$, Dichte $\rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, kinematische Viskosität $\nu = 8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$) mit der mittleren Geschwindigkeit $u_m = 3\,\mathrm{m/s}$. Der Druckverlust betrage $\Delta p = 24\,\mathrm{mbar}$. Mittels einer Energiebilanz berechne man die Temperaturänderung des Fluids aufgrund von Dissipation. Hinweis: $h(p,t) = c_v T + p/\rho$.

Lösung: Aus Energiebilanz $\dot{m}h_{\mathrm{ges,ein}} = \dot{m}h_{\mathrm{ges,aus}}$ folgt $h_{\mathrm{ein}} = h_{\mathrm{aus}}$ und somit

$$c_p T_{m,ein} + \frac{p_{\mathrm{ein}}}{\rho} = c_p T_{m,aus} + \frac{p_{\mathrm{aus}}}{\rho} \quad ,$$

$$T_{\mathrm{m,aus}} - T_{\mathrm{m,ein}} = \frac{p_{\mathrm{ein}} - p_{\mathrm{aus}}}{\rho c_p} = 0{,}001\,\mathrm{K} \quad .$$

13) Ist die Rohrströmung turbulent?

Lösung: $Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} = 1125 < 2300$. Die Strömung ist laminar.

14) Mit welcher konstanten Wärmestromdichte $\dot{q}_w$ muss die Rohrwand beheizt werden, damit die mittlere Austrittstemperatur der Flüssigkeit um 4K über der mittleren Einlauftemperatur liegt?
Lösung: Energiebilanz

$$d\pi L \dot{q}_w = \bar{u} d^2 \frac{\pi}{4} \rho c_p \Delta T \quad ,$$

$$\dot{q}_w = \rho \bar{u} c_p \Delta T \frac{d}{4L} = 7{,}2\,\mathrm{kW/m^2} \quad .$$

15) Was versteht man unter der "viskosen Unterschicht" einer turbulenten Scherströmung?
Lösung: Die Scherspannung in einer turbulenten Scherströmung setzt sich aus einem viskosen Anteil und einer "turbulenten" Scheinspannung aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegung zusammen. In der Wandnähe wird durch die Haftbedingung die Schwankungsbewegung unterdrückt. Daher dominiert in einer wandnahen Schicht die Scherspannung aufgrund von Viskosität. Man nennt daher diese Schicht "viskose Unterschicht".